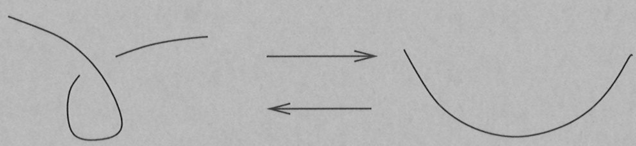
Bulletin

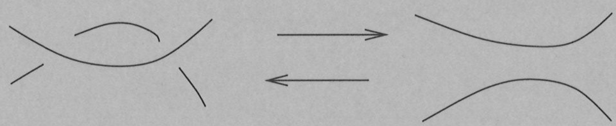
Februar 2007 – Février 2007

N° 103

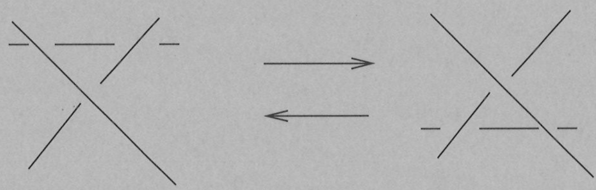
I Ver–/Entdrillung



II Ver–/Enthaekelung



III Verschiebung

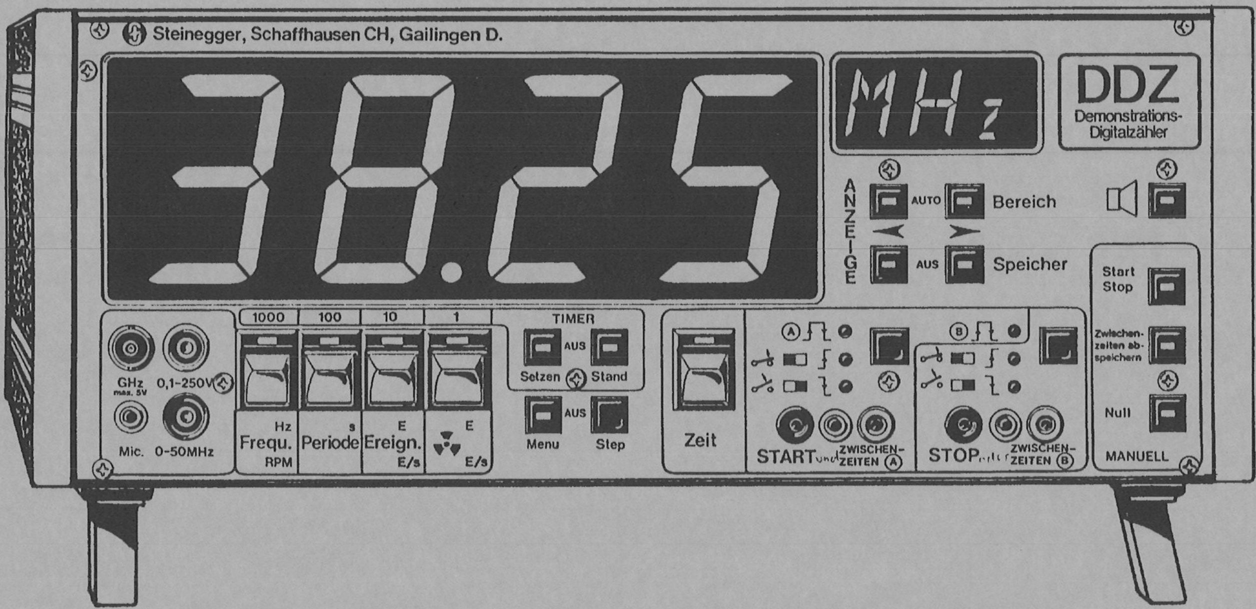


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalzähler DDZ

Art. Nr. 51



Preis inkl. MWSt nur SFr 2'300.-

Kompakt-Multifunktionszähler der Spitzenklasse!

- **56 mm hohe helle Ziffern- und 3-stellige Einheitenanzeige**
- **Breitestes Anwendungsspektrum und selbsterklärende Bedienung**
- **Misst Zeitintervalle, Frequenzen, Perioden, RPM usw.**
- **Timerfunktion, Ereigniszählung, Zählrohranschluss, akustische Rückmeldung, 50 Messwertspeicher, bidirektionale serielle Schnittstelle, Hilfsspeisungen für Zusatzgeräte**
- **Auflösung von bis zu 10 Ziffern durch Ziffernschiebung**
- **Automatische und manuelle Bereichsumschaltung, vollautomatische Signalanpassung dank Triggerautomatik**
- **Hervorragendes Preis-/Leistungsverhältnis**

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Der neue Demonstrations-Digitalzähler DDZ" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
CH-8200 Schaffhausen

☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Internet-Adressen – Adresses Internet

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch

Titelseite

"Die drei Reidemeister-Schritte", siehe Artikel von Meike Akveld, *Knoten in der Mathematik*, Seite 35.

"Savoir-faire en mathématiques pour bien commencer à l'EPF-L"

Comme beaucoup d'entre vous ont pu s'en rendre compte, une brochure intitulée "Savoir-faire en mathématiques pour bien commencer à l'EPF-L" (On peut obtenir la brochure en s'adressant à sma@epfl.ch) a circulé dans les gymnases suisses, et a provoqué diverses réactions de la part des professeurs de mathématiques.

S'appuyant sur les bons contacts établis avec l'EPF-L à l'occasion la petite révision de l'O/RRM, ainsi que lors de nos travaux à l'interface gymnase-EPF, le comité de la SSPMP a cherché le dialogue avec les initiateurs de cette brochure, pour en clarifier certains éléments. Une rencontre a eu lieu dans ce sens, le 18 janvier dernier à l'EPF-L.

Lors de cette séance, les représentants des trois commissions de mathématiques de la SSPMP et moi-même, avons perçu chez nos interlocuteurs de l'EPF-L responsables du projet, un véritable souci de collaborer à l'évolution de cette brochure.

Les tests anonymes "online" et l'usage de cette brochure lors du premier semestre à l'EPF-L ont rencontré (selon les responsables) un vif succès auprès des étudiants, permettant même de réels progrès en première année, jusqu'à la réussite du premier propédeutique pour certains qui n'auraient pas passé un examen d'entrée. Cette constatation stimule les responsables de l'EPF à continuer sur la voie du soutien des étudiants inscrits plutôt que de la sélection à l'entrée.

Concrètement, la SSPMP s'est engagée à collaborer à l'avertissement et à la préface de l'édition de l'été 2007 – qui avaient donné lieu à quelques malentendus – et, pour la version été 2008, à la classification des exercices, suivant qu'ils puissent être considérés comme pré-requis à l'entrée de l'EPF ou qu'ils soient repris au cours du premier semestre.

La SSPMP se réjouit de cette collaboration. En cas de remarques concernant cette brochure, n'hésitez pas les exprimer à l'adresse suivante.

Elisabeth McGarrity, Présidente SSPMP
mcgarrity@rhone.ch

Début 2007 — Aux membres de la SSPMP

Mesdames, Messieurs, chers collègues,

La SSPES a transféré ses adresses sur une nouvelle banque de donnée. Même si tout s'est bien passé lors de l'envoi du journal « Gymnasium Helveticum », l'impression des adresses de la SSPMP en vue de l'envoi du bulletin 102 de cette société en juillet 06 a pour des raisons que nous ne pouvons retracer, posé des problèmes. Certains membres ont ainsi reçu deux bulletins, d'autres n'en n'ont par contre pas reçu.

Je vous prie de m'en excuser et vous propose de commander l'exemplaire du bulletin 102 non livré par mail auprès de la présidente de la SSPMP, à l'adresse suivante :

Madame Elisabeth McGarrity, présidente SSPMP: mcgarrity@rhone.ch

Je vous souhaite une Bonne Année et vous fais part de mes cordiales salutations:

HP. Dreyer — Hans Peter Dreyer, président SSPES, praesident@vsg-sspes.ch

"Mathematische Fähigkeiten, um gut an der EPFL zu beginnen"

Vielen VSMP-Mitgliedern ist wohl bereits bekannt, dass derzeit an diversen Schweizer Gymnasien eine Broschüre im Umlauf ist mit dem Titel: "Mathematische Fähigkeiten, um gut an der EPFL zu beginnen" (Die Broschüre kann unter sma@epfl.ch bestellt werden). Diese Schrift hat verschiedene Reaktionen ausgelöst.

Aufbauend auf den guten Kontakten zwischen dem VSMP und der EPFL, die bei den Arbeiten im Rahmen der kleinen MAR-Revision und bei den Diskussionen im Zusammenhang mit der Schnittstelle Gymnasium-ETH entstanden sind, hat der VSMP-Vorstand mit den Initianten und Autoren dieser Broschüre das Gespräch gesucht, um gewisse Punkte zu klären und die Absichten der EPFL besser kennen zu lernen. Anlässlich des offenen und überaus konstruktiven Gesprächs, das am 18. Januar 2007 in Lausanne stattgefunden hatte, konnten die Vertretungen der drei Mathematik-Kommissionen (CRM, CMSI & DMK) sowie die Präsidentin des VSMP ein echtes Interesse und ein grosses Engagement bei den vier EPFL-Verantwortlichen feststellen, was die Weiterentwicklung und Verbesserung dieser Broschüre betrifft, vor allem auch im Hinblick auf eine zukünftige enge Zusammenarbeit mit dem VSMP.

Die anonymen Online-Tests und das Selbststudium mit der genannten Broschüre während des ersten Semesters wurden von den EPFL-Studierenden als überaus hilfreich empfunden. Dieses "Programm" verhalf denn auch diversen Studienanfängern, welche wohl bei einem Eintrittstest gescheitert wären, die ersten Vorprüfungen erfolgreich zu bestehen. Diese Tatsache bestärkte die Verantwortlichen der EPFL, lieber diesen Weg der Studienbegleitung weiter zu entwickeln, als Eintrittsprüfungen einzuführen. Sie sind auch überzeugt, auf diesem Weg die Erfolgsquoten der Studierenden an der EPFL längerfristig zu erhöhen.

Konkret ist folgendes vorgesehen: bei der Ausgabe 2007 dieser Broschüre wird der VSMP aus Zeitgründen erst beim Vorwort – mit der Absichtserklärung – mitwirken können, bei der Ausgabe 2008 dann auch beim Aufgabenmaterial; hier insbesondere, was die auch rein äusserlich sichtbare Aufteilung in "Das wird vorausgesetzt" und "Begleitmaterial fürs erste Studienjahr" betrifft.

Der VSMP-Vorstand freut sich auf diese konstruktive Zusammenarbeit mit den Verantwortlichen der EPFL. Für Rückmeldungen aus unserem Leserkreis oder Anregungen und Fragen zu dieser Broschüre stehen wir gerne zur Verfügung. Liebe Kollegin, lieber Kollege, nehmen Sie doch einfach Kontakt auf mit uns!

Elisabeth McGarrity, VSMP-Präsidentin
mcgarrity@rhone.ch

Anfangs 2007 — An alle Mitglieder des VSMP

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen

Der VSG hat im Juli 2006 seine Adressdatei auf eine neue Datenbank transferiert. Während wir beim Versand des GH 5-06 keine Klagen hatten, gab es aus einem nicht mehr rekonstruierbaren Grund beim Drucken der Adressen für den VSMP ein Problem:

Einzelne von Ihnen haben das VSMP-Bulletin 102 gar nicht, andere jedoch doppelt erhalten. Ich entschuldige mich dafür und bitte Sie, Nachbestellungen des Bulletins per E-Mail an Ihre Präsidentin zu richten:

Frau Elisabeth McGarrity, Präsidentin VSMP: mcgarrity@rhone.ch

Ich wünsche alles Gute im neuen Jahr und verbleibe mit freundlichen Grüssen:

Hans Peter Dreyer, Präsident VSG, praesident@vsg-sspes.ch

"Savoir-faire in matematica per studiare all'EPFL"

Molti di voi avranno potuto costatare che un fascicolo intitolato "Savoir-faire in matematica per studiare all'EPFL" (L'opuscolo è ottenibile scrivendo all'indirizzo sma@epfl.ch). è circolato nei licei svizzeri, provocando diverse reazioni da parte degli insegnanti di matematica.

Confidando sulle buone relazioni istaurate con l'EPFL in occasione della consultazione sulla revisione parziale dell'O/RRM, così come nell'ambito dei lavori nell'interfaccia liceo - SPF, il comitato della SSIMF ha cercato il dialogo con gli iniziatori del fascicolo per chiarirne alcuni elementi. Un incontro in tal senso ha avuto luogo all'EPFL lo scorso 18 gennaio.

Nel corso della riunione, i rappresentanti delle tre commissioni di matematica della SSIMF e la sottoscritta, abbiamo riscontrato presso i nostri interlocutori dell'EPFL responsabili del progetto, una sincera volontà di collaborare all'evoluzione di questa pubblicazione.

Gli anonimi test "in rete" e l'utilizzo del manuale durante il primo semestre alla Scuola politecnica federale di Losanna hanno incontrato (secondo i responsabili) un vivo interesse presso gli studenti, permettendo a taluni di conseguire dei significativi progressi nel corso del primo anno a alcuni avrebbero superato con successo il primo esame propedeutico, allorquando non erano in condizione di superare un eventuale esame d'entrata. Questa constatazione ha incoraggiato i responsabili dell'EPFL a continuare sulla strada del sostegno agli studenti iscritti, piuttosto che procedere ad una selezione all'entrata.

Nel concreto, la SSIMF si è impegnata a collaborare alle Avvertenze e alla Prefazione dell'edizione dell'estate 2007 – erano queste in particolare ad aver dato adito a qualche malinteso e preoccupazione – e per la versione dell'estate 2008 alla classificazione degli esercizi secondo se sono da considerare come prerequisiti all'entrata all'EPFL oppure se riguardano temi ripresi nel corso del primo semestre.

La SSIMF si rallegra di questa rinnovata collaborazione tra insegnanti liceali e Scuole politecniche federali. Non esitate ad esprimere le vostre osservazioni al riguardo dell'opuscolo, inviandole al seguente indirizzo.

Elisabeth McGarrity, Presidente SSIMF
mcgarrity@rhone.ch

Inizio 2007 — Ai membri della SSIMF

Gentili signore, egregi signori, cari colleghi,

la SSISS ha recentemente trasferito la sua lista degli indirizzi in una nuova banca dati. Se in occasione dell'invio della rivista *Gymnasium Helveticum* non ci sono stati intoppi, l'elaborazione degli indirizzi della SSIMF per la spedizione del numero 102 del suo *Bulletin* nel luglio 2006 ha creato qualche problema per ragioni che non siamo in grado di ricostruire: alcuni soci hanno ricevuto due esemplari del *Bulletin* mentre altri sono rimasti senza.

Vi prego di scusarmi per questo spiacevole inconveniente e prego chi non avesse ricevuto il Bulletin 102 di ordinarlo per posta elettronica alla presidente della SSIMF.

Colgo l'occasione per augurarvi un Buon Anno e per trasmettervi i miei più cordiali saluti.

Hans Peter Dreyer, presidente SSISS, praesident@vsg-sspes.ch

Secrétaire - SSPMP

Le poste de **secrétaire du comité** de la SSPMP est à repourvoir pour la fin 2007.

C'est un poste attractif parce que :

- Il offre la possibilité d'établir un réseau de connaissance parmi les collègues de toutes la Suisse.
- Il permet une avance sur des informations importantes et par conséquent la possibilité d'avoir une certaine influence sur certaines questions de politique de l'enseignement par exemple lors de consultations.
- Il permet la collaboration à la rédaction du bulletin, et à d'autres activités des commissions de la SSPMP.

Quels sont les tâches :

- Présence lors des séances du comité (trois par année) ainsi que lors de l'assemblée générale. Procès-verbal des séances.
- Archivage des papiers (procès-verbaux, prises de position, etc....)
- Coordination lors de l'envoi du bulletin (trois fois par année)

Quelles sont les exigences?

- Etre membre de la SSPMP
- Enseigner les mathématiques ou la physique dans le secondaire II.
- Comme les séances se tiennent en français et en allemand, il est préférable de comprendre des deux langues.

Les intéressés peuvent s'annoncer auprès de la présidente de la SSPMP, Elisabeth McGarrity (mcgarrity@rhone.ch) ou auprès du secrétaire actuel Wolfgang Pils (wolfgang.pils@bluewin.ch). Tous deux pourront vous donner de plus amples renseignements.
Nous nous réjouissons de votre engagement.

Brigue, janvier 2007, E. McGarrity

VSMP-Aktuar

Im VSMP-Vorstand wird das Amt der **Aktuarin** beziehungsweise des **Aktuars** frei. Deshalb suchen wir auf Ende 2007 eine Nachfolgerin beziehungsweise einen Nachfolger.

Warum dieses Amt attraktiv ist:

- Beziehungsnetz zu Fachkollegen in der ganzen Schweiz
- Informationsvorsprung und damit Möglichkeit der Einflussnahme bei Vernehmlassungen und anderen Aktionen zu bildungspolitischen Themen
- Mitgestaltungs- und Publikationsmöglichkeiten im Bulletin, bei der Organisation von Weiterbildungskursen und fachspezifischen Publikationen in den Kommissionen des VSMP

Welche Aufgaben auf Sie zukommen:

- Präsenz an drei Vorstandssitzungen (pro Jahr) und an der Generalversammlung
- Protokolle verfassen
- Archivierung der Akten (Protokolle, Stellungnahmen des VSMP bei Vernehmlassungen, ..)
- Bulletinversand koordinieren (dreimal pro Jahr)

Welche Anforderungen an Sie gestellt werden:

- Mitglied im VSMP
- Mathematik- oder Physiklehrkraft auf der Sekundarstufe II
- Da die Sitzungen auf französisch und auf deutsch stattfinden, ist es von Vorteil, wenn die Aktuarin, der Aktuar beide Sprachen versteht.

Interessierte melden sich bitte bei der VSMP-Präsidentin Elisabeth McGarrity (mcgarrity@rhone.ch)
oder beim derzeitigen Aktuar Wolfgang Pils (wolfgang.pils@bluewin.ch).
Beide erteilen gerne weitere Auskünfte.
Wir freuen uns auf Ihre Anfrage.

Brig, Januar 2007, E. McGarrity

Studying Physics at the University of Geneva

To study physics at the University of Geneva implies to enjoy the unique opportunity to learn about and develop practical competences in a field as large as the universe itself, in addition to developing the skill to get to the bottom of a difficult subject if necessary. It implies knowing how to attack and solve a problem, any kind of problem, using common sense, in a straightforward manner. These skills are highly appreciated in many areas of human activity, as is illustrated by the large variety of professions in which the physics alumni of the University of Geneva have made a career: They are for example financial manager, neurophysiologist, conductor of an orchestra, scientific communicator, investment or fortune expert, or director of Météosuisse. Some are specialists in technology transfer; others have become a teacher or a scientist in academia and industry.

Physics is universal, and the same applies to studying physics at the university. However, in Geneva this science has a special flavor. Not only because from the very first start excellent physicists studied there, but also because it is enriched by a narrow collaboration with CERN, one of the worlds most advanced laboratories in particle physics. The strong international visibility of the physics section of the University of Geneva is due to decisive work, published in prestigious scientific journals, which its researchers have produced in domains as varied as astrophysics, materials physics, cryptography, cosmology, mesoscopic physics, and particle physics. Since 2001 the condensed matter physics group at the University of Geneva has been the leading house of the National Centre of Competence in Research MaNEP, "Materials with Novel Electronic Properties". This center, with the University of Geneva as host institution and a broad Swiss network, focuses its activities on research and development of novel materials with promising electronic properties.

The various fields of physics of the University of Geneva are represented by 25 professors with their research teams grouped in 5 departments:

1) Condensed Matter Physics: The matter which surrounds us seems common because we are used to it. Yet, upon closer inspection, it reveals unexpected treasures. Whether it concerns solids, liquids, glasses, polymers, the more scientists find out about them, the more fascinating these materials become, while extending their properties and discovering novel phenomena.

2) Nuclear and Particle Physics: In the 5th century BCE Democritos, by observing sand, conceived the idea that particles constitute the fundamental building blocks of matter. This intuitive idea has been confirmed and enriched by high energy collision experiments as part of an ongoing race, in particular at CERN in Geneva, to unravel the mysteries of what constitutes matter.

3) Theoretical Physics. What is the origin of the universe? What is its history? How will it evolve? Which are the forces governing it? These are some of the questions that a theoretical physicist attempts to answer. From cosmology to particle physics, while passing through chaotic systems, electronic systems and even life itself, theoretical physics is able to attack the most challenging problems of the universe using mathematics and brainpower as the only tools.

4) Applied Physics. Physics not only reveals the secrets of the universe, it also contributes to society and economical development, by translating the laws of physics into novel technologies and devices. For example by turning the paradoxes of quantum mechanics into daily life communication and unbreakable encryption technology, using

lasers to redirect lightning, and superconductors to make powerful magnets used in levitating trains, magnetic imaging and.... the large hadron collider (LHC), the new 25 kilometer particle racetrack of CERN in Geneva.

5) Astronomy. A universe 13.7 billion years old, containing billions of galaxies, each one counting billions of stars, a fair portion of which is accompanied by one or more planets. This is the immense arena of astronomy. In l'Observatoire de Genève the evolution of stars is studied from birth to death, as well as the dynamics of galaxies with their sometimes cannibalistic habits, high energy cosmological events and, last but not least, extra-solar planets. As more and more exo-planets are being discovered, the more among them look similar to mother earth....

Are you interested in physics, or you like to bring this to the attention of students whom you know, students in your class or students in your school? We invite you to visit: www.unige.ch/sciences/physique to obtain further details as well as contact information.

L'enseignement des sciences et de la culture scientifique intrigue les sciences sociales

Enseigner les sciences, la démarche scientifique, ou encore promouvoir une certaine culture scientifique aux jeunes générations est un réel défi. Si la complexité de la tâche est connue depuis longtemps, la prise de conscience du problème se fait progressivement. La réalité des classes et les légitimes difficultés des élèves et des enseignants contredisent l'idée reçue, si bien établie dans les esprits et pourtant naïve, que la science se montre d'elle-même, qu'elle est une méthode de connaissance naturelle allant de découverte en découverte, composée d'évidences que tout un chacun peut reconnaître dès qu'il y porte le regard.

Les sciences humaines et sociales s'intéressent à cette énigme : comment se fait-il qu'un concept scientifique prenne le caractère de l'évidence une fois acquis, alors qu'il pose tant de difficultés à l'apprenant ? Du point de vue de l'enseignant, le problème apparaît au moment où il est amené à devoir expliquer un concept qu'il a si bien intégré, qu'il n'a plus la conscience du long chemin parcouru pour atteindre cette compréhension assurée. Ce qui peut parfois pousser le scientifique à déclarer qu'il *voit* le concept dans une démonstration expérimentale… Pour le chercheur, il s'agit reconstruire l'histoire cognitive de ce long chemin, c'est-à-dire de mieux comprendre les processus à l'œuvre chez l'apprenant lorsqu'il tente de s'approprier ne serait-ce que les premières bribes de connaissances scientifiques.

Du point de vue des élèves, qui se font leur propre idée concernant ces processus d'apprentissage et l'enjeu de leurs activités en classe, on constate un certain nombre de malentendus robustes. Pour certains élèves, il s'agit d'acquérir des connaissances se cumulant les unes aux autres à l'instar d'une encyclopédie ; pour d'autres, de se débrouiller avec des stratégies permettant d'obtenir de bonnes notes aux travaux écrits ; pour d'autres encore, apprendre la physique consiste à savoir manipuler un certain nombre de formules sans se rendre compte que ces calculs sont des simplifications spécialement conçues pour l'enseignement. Pourtant, l'utilisation d'un système formel mathématique fonctionne comme un outil important dans la pratique de la science. L'enjeu que l'enseignant des sciences propose à l'apprenant, est de passer d'une pensée spontanée, appréhendant le monde physique et ses phénomènes sur un certain mode, à une modélisation abstraite qui permette de dépasser les intuitions erronées, et ultérieurement de s'exprimer en langage formel, de sorte à pouvoir prédire ou expliquer le comportement des objets physiques dans une grande variété de situations.

L'Institut Psychologie et Education de l'Université de Neuchâtel se lance dans cette aventure, à travers le projet européen ESCALATE[i], qui réunit des partenaires de 5 pays (France, Grèce, Israël, Royaume-Uni, Suisse). L'approche spécifique de ce projet consiste à faire connaître et mettre à l'épreuve de la pratique en classe de science une pédagogie de l'argumentation, notamment en s'appuyant sur des logiciels construits dans ce but (cartes argumentatives, micro-mondes). L'idée d'encourager les interactions entre élèves, et de baser la construction de connaissances sur des échanges argumentés n'est pas nouvelle ; cependant, sa mise en œuvre nécessite un effort particulier de mise au point de dispositifs adéquats, susceptibles d'être modifiés pour s'ajuster à la réalité de la classe efficacement.

La seconde dimension à la base du projet est l'accent mis sur l'expérimentation par les apprenants, à travers des situations permettant la manipulation de variables et une démarche de recherche de la part de l'apprenant. Ces situations sont reprises dans des réalisations informatiques modifiables (simulateurs, base de données, etc.) permettant des démarches expérimentales complémentaires à l'observation du matériel concret, et invitant à la réflexion quant à leurs différences.

Les enseignant-e-s intéressé-e-s à collaborer à ce projet sont les bienvenus.

Alaric Kohler
Doctorant
Institut Psychologie et Education
Université de Neuchâtel

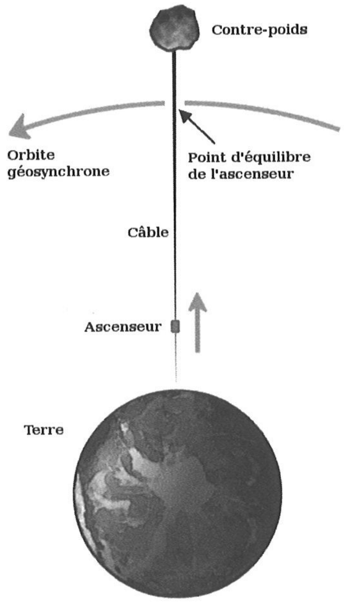
Espace Louis-Agassiz 1
2000 Neuchâtel
++41 (0)32 718 18 52
alaric.kohler@unine.ch

[i] Enhancing SCience Appeal in Learning through Argumentative inTEraction (ESCALATE) : *Accroître l'attractivité de la science dans l'apprentissage à travers les interaction argumentative* est un projet du 6[ème] Programme Cadre *Science and Society* de l'Union européenne (2002-2006).

Pour en savoir plus :	Site Internet du 6ème programme cadre européen:	http://europa.eu/scadplus/leg/fr/lvb/i23012.htm
	Site Internet de *Science and Society* :	http://cordis.europa.eu/science-society/
	Site Internet d'ESCALATE:	http://escalate.org.il

Quelques nouvelles du 44$^{\text{ème}}$ Congrès Pluraliste des Sciences de Louvain-la-Neuve

Les 22, 23 et 24 août 2006 s'est tenu à l'Université de Louvain-la-Neuve le plus grand recyclage scientifique pour enseignant existant annuellement dans les communautés française et germanophone de Belgique.
Il permet à plus de 400 professeurs d'actualiser leurs connaissances, et de garder leur enseignement en prise directe avec la réalité scientifique d'aujourd'hui.
Ce congrès concernait plus particulièrement les professeurs de sciences du secondaire en Belgique. L'organisation qui était assurée à l'origine par le Ministère de l'Education Nationale aidée des deux associations pluralistes de professeurs PROBIO (Association des Professeurs de Biologie) et l'ABPPC (Association Belge des Professeurs de Physique et Chimie) est depuis 1981 assurée à part entière par ces deux dernières. Depuis 2001, la FEGEPRO (Fédération des Professeurs de Géographie) est également un partenaire à part entière.
Le Congrès repose sur le mélange de conférences scientifiques de haut niveau, d'exposés pédagogiques, de séances de laboratoire et d'expositions de livres et de matériel scolaires. C'est bien sûr aussi l'occasion pour les enseignants de se retrouver et de confronter leurs points de vue concernant leurs expériences et leur vécu pédagogique.
J'ai assisté à de bonnes conférences et à des ateliers de qualité, l'exposé de M. Benoit MICHEL qui s'est tenu devant un public nombreux et dont le thème était l'ascenseur spatial m'est apparu particulièrement intéressant.
Le concept de l'ascenseur spatial date d'il y a plus d'un siècle, plus exactement en 1895 par Constantin Tsiolkowki. Le concept est relancé en 1960 par Youri Artsutanov mais n'est présenté au grand public qu'en 1978 par Arthur C. Clarke dans son roman de science-fiction *Les Fontaines du Paradis*.
La théorie est simple : un câble, un contrepoids à un bout et la Terre en rotation à l'autre bout. Le système est en équilibre puisque la moitié du câble se trouve au dessus de l'orbite géostationnaire, l'autre moitié étant en dessous. La partie inférieure « tirant » vers le bas grâce à son poids, la partie supérieure « tirant » vers le haut grâce à la force centripète.



Avoir une théorie, c'est bien, la mettre en pratique est souvent plus difficile car derrière un principe d'apparence simple se cachent de nombreux défis technologiques. En voici quelques-uns.

Défi 1 : la solidité du câble.
Il doit être capable de supporter les forces et les contraintes qui s'appliquent sur lui.
Les calculs effectués sur des câbles en acier ont montré que dès 53 Km le câble rompt sous son propre poids. Ce défi semble malgré tout pouvoir être relevé car depuis 1993, un nouveau matériau est pressenti : les nanotubes[1] de carbone. D'une résistance théorique de 30000 kg/mm^2 ils rendent réalisable la construction d'un câble de 100000 km capable de soulever une charge de 20 tonnes.

Défi 2 : le lancement du câble.
L'extrémité attachée sur Terre ne pose pas de problème, c'est l'autre bout qui doit atteindre et dépasser l'altitude

[1] Les nanotubes de carbone sont une forme de structure cristalline du carbone proche des fullerènes. Ils sont un des premiers produits industriels du domaine des nanotechnologies.

géostationnaire[2] qui est plus difficile à déployer. Il apparaît difficile d'effectuer une mise en place depuis le sol. La solution envisagée étant d'utiliser une navette spatiale afin de mettre une bobine à 500 km d'altitude, de la mettre en orbite géostationnaire grâce à une petite fusée puis de la dérouler vers le sol et vers l'espace simultanément.

Défi 3 : L'alimentation en énergie.
Un câble forcément trop lourd ne pouvant être utilisé pour alimenter la cabine en énergie, la solution envisagée est l'utilisation d'un laser depuis le sol visant un panneau solaire situé sous la cabine. L'énergie ainsi transmise devrait être 20 à 30 fois supérieure à la lumière du Soleil.

Défi 4 : éviter les catastrophes.
Les causes pourraient être multiples : les micrométéorites, les orages, les débris en orbite. Concernant la météorologie, les zones les plus stables se situent aux alentours de l'équateur. La base du câble serait fixée sur une plateforme et pourrait ainsi se déplacer de quelques kilomètres afin d'éviter les orages. Les dégâts de micrométéorites eux pourraient être réparés au cours des montées successives par le dépôt de brins supplémentaires venant renforcer le câble existant.

Enfin, les études du financement montrent que le coût d'un tel ascenseur est rapidement amorti lors de la mise en orbite des premiers satellites. Cette méthode diminuerait le prix du kg mis en orbite d'au moins un facteur 10 par rapport aux lanceurs actuels. Par ailleurs, la construction d'un second ascenseur à partir du premier devient beaucoup plus aisée et le coût de construction diminue d'autant.
Pour finir, les derniers problèmes techniques devraient être résolus vers 2010 et la date de mise en service du premier ascenseur devrait se situer autours de 2020.

Pour la CRP
Marc Ferrer

[2] L'orbite géostationnaire est située à 35'786 km d'altitude au dessus de l'équateur.

Attente aux guichets

Jean Piquerez
Collège et Ecole de Commerce Madame de Staël

Le problème 39 en page 89 de l'ouvrage « Probabilités et Statistique » du regretté Freddy Taillard m'a inspiré une généralisation. Envisageons dès lors l'énoncé suivant :

Trois personnes entrent dans une banque au moment de l'ouverture. Deux guichets seulement sont ouverts. Soit X_1 et X_2 le temps (en minutes) qu'il faut pour servir les deux personnes qui ont eu accès immédiatement aux guichets. Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur un intervalle de temps pris pour unité de temps. Leur densité est donc donnée par

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit Y, le temps que passe le troisième client à faire la queue en attendant que l'un ou l'autre des guichets se libère. Déterminer la densité $f_Y(y)$ associée à Y. On a

$$P(Y > \alpha) = P(X_1 > \alpha \text{ et } X_2 > \alpha) = P(X_1 > \alpha)P(X_2 > \alpha) = (1-\alpha)^2.$$

Soit $F_Y(\alpha)$ la fonction de répartition de Y,

$$F_Y(\alpha) = P(Y \le \alpha) = 1-(1-\alpha)^2 \Rightarrow f_Y(\alpha) = F_Y'(\alpha) = 2(1-\alpha) \text{ si } 0 \le \alpha \le 1.$$

Ainsi

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Supposons ensuite qu'un quatrième client est entré en même temps que les trois premiers et fait la queue derrière le troisième. Déterminer la densité $f_Z(z)$ de la variable aléatoire Z indiquant le temps d'attente de ce client avant qu'il n'ait accès à un guichet.

D'après la formule des probabilités totales, on a, pour $0 \le \alpha \le 1$:

$$P(Z > \alpha) = P(Z > \alpha | Y > \alpha)P(Y > \alpha) + P(Z > \alpha | 0 \le Y \le \alpha)P(0 \le Y \le \alpha).$$

Or, $P(Z > \alpha | Y > \alpha) = 1$ à l'évidence, d'une part, et

$$P(Z > \alpha | 0 \le Y \le \alpha)P(0 \le Y \le \alpha) = \int_0^\alpha P(Z > \alpha | Y = y) f_Y(y)dy$$

car il faut alors conditionner l'événement «$Z > \alpha$» par tous les événements «$Y = y$», ce qui se fait à l'aide de la densité de probabilité de la variable aléatoire Y pour toutes les valeurs de Y allant de 0 à α.

Au temps y, les deux guichets sont donc occupés, l'un par le troisième client qui vient de s'y trouver, l'autre par l'un des deux premiers clients qui n'a pas encore fini d'être servi. Dès lors il convient de calculer probabilité qu'aucun de ces deux guichets ne se libère pour le quatrième client avant le temps α.

Si le troisième client se présente au temps y, la probabilité qu'il reste devant le guichet jusqu'au temps α au moins, avec $y \le \alpha$, est donnée par $1-(\alpha - y)$. Quant à celui des deux premiers clients qui est encore à l'autre guichet au temps y, la probabilité qu'il y reste jusqu'au temps α au moins est donnée par

$$P(X_i > \alpha \mid X_i > y) = \frac{P(X_i > \alpha)}{P(X_i > y)} = \frac{1-\alpha}{1-y}.$$

Ainsi,

$$P(Z > \alpha \mid Y = y) = \left(1-(\alpha - y)\right)\cdot \frac{1-\alpha}{1-y}$$

d'après l'hypothèse d'indépendance. Il reste donc à calculer l'intégrale précédente :

$$\int_0^\alpha \frac{(1-\alpha+y)(1-\alpha)}{1-y}\cdot 2(1-y)\,dy = 2(1-\alpha)\left[(1-\alpha)y + \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^\alpha = (1-\alpha)\alpha(2-\alpha)$$

d'où

$$P(Z > \alpha) = (1-\alpha)^2 + (1-\alpha)\alpha(2-\alpha) = (1-\alpha)(1+\alpha-\alpha^2).$$

Généralisation du problème

On suppose que $(n+1)$ personnes entrent au moment de l'ouverture dans une banque disposant de n guichets. On suppose ensuite que $(n+2)$ personnes rentrent dans cette banque au moment de l'ouverture.

On a alors :

$$F_{X_{n+1}}(\alpha) = P(X_{n+1} \le \alpha) = 1-(1-\alpha)^n \Rightarrow f_{X_{n+1}}(\alpha) = F'_{X_{n+1}}(\alpha) = n(1-\alpha)^{n-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(X_{n+2} > \alpha) &= P(X_{n+1} > \alpha) + \int_0^\alpha P(X_{n+2} > \alpha \mid X_{n+1} = x) f_{X_{n+1}}(x)\,dx \\
&= (1-\alpha)^n + \int_0^\alpha (1-\alpha+x)\left(\frac{1-\alpha}{1-x}\right)^{n-1} n(1-x)^{n-1}\,dx \\
&= (1-\alpha)^n + n(1-\alpha)^{n-1}\int_0^\alpha (1-\alpha+x)\,dx \\
&= (1-\alpha)^{n-1}\left[1-\alpha + n\left(\alpha(1-\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] \\
&= (1-\alpha)^{n-1}\left(1+(n-1)\alpha - \frac{n}{2}\alpha^2\right)
\end{aligned}$$

Si $n = 2$, on retrouve la réponse précédente.
Remarquons, en toute logique que

$$P(X_{n+2} > 0) = 1,\ P(X_{n+2} > 1) = 0,$$

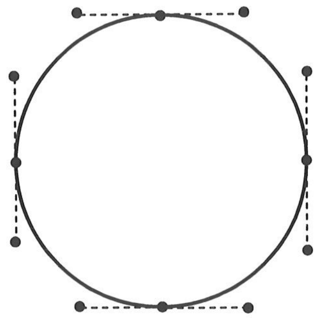
et que, si $n \to \infty$, alors

$$P(X_{n+2} > \alpha) \to 0, \forall \alpha \in \left]0,1\right], \text{ ce qui est rassurant.}$$

PS : Monsieur Christian Benes, spécialiste en Probabilités et PhD à Duke, qui a relu mon article, me fait remarquer qu'en général, pour ce genre de modèle,on n'utilise pas de variables aléatoires uniformes qui représentent assez mal la réalité, mais des variables exponentielles.

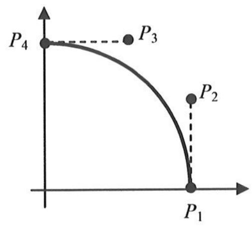
CERCLES et ARCS DE BÉZIER

Jean-Marc Ledermann, Neuchâtel



Un cercle, dessiné par un logiciel graphique est en pratique composé de 4 arcs de Bézier. Pour observer cette particularité, il suffit de dessiner un cercle avec Illustrator par exemple, puis de le sélectionner pour voir apparaître les points de contrôle des arcs de Bézier qui le forment.

Dans cet article, nous nous intéresserons à la meilleure façon de choisir les points de contrôle de ces arcs de sorte qu'ils ressemblent à des quarts de cercle, puis nous observerons la différence entre le dessin produit et un *vrai* cercle.



Prenons le quart de cercle de rayon 1 centré à l'origine. Il est approché par un arc de Bézier dont les points de contrôle sont P_1, P_2, P_3 et P_4. Les extrémités de l'arc de Bézier étant P_1 et P_4, il est naturel de choisir $P_1(1;0)$ et $P_4(0;1)$.
En considérant l'arc de Bézier comme la trajectoire d'un point mobile, on sait que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est le tiers du vecteur vitesse en P_1 et que le vecteur $\overrightarrow{P_3P_4}$ est le tiers du vecteur vitesse en P_4 (pour s'en convaincre, il suffit de dériver les fonctions paramétriques définissant l'arc de Bézier).
Pour que la courbe formée des 4 arcs soit lisse et ressemble à un cercle il faut que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit vertical et que le vecteur $\overrightarrow{P_3P_4}$ soit horizontal. Pour des raisons de symétrie, on prendra des vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_3P_4}$ de même norme.

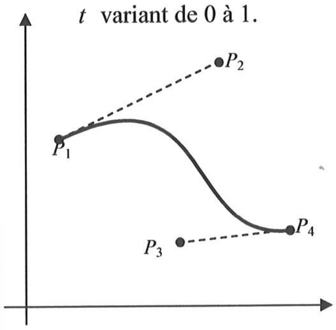
Les remarques ci-dessus nous poussent donc à choisir $P_2(1;k)$ et $P_3(k;1)$ et il reste à trouver une valeur positive de k de sorte que l'arc de Bézier ressemble à un arc de cercle.

Arcs de Bézier

Un arc de Bézier contrôlé par les 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 est la courbe formée des points P donnés par l'égalité

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)^3\overrightarrow{OP_1} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OP_2} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OP_3} + t^3\overrightarrow{OP_4}$$

t variant de 0 à 1.



On obtient ainsi l'équation paramétrique de l'arc de Bézier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [0;1]$$

ou

$$\begin{cases} x(t) = (1+2t)(1-t)^2 + 3t^2(1-t)k \\ y(t) = t^2(3-2t) + 3t(1-t)^2 k \end{cases} \qquad t \in [0;1]$$

Plusieurs méthodes sont envisageables pour trouver une bonne valeur de k.

- Dans un cours d'applications des mathématiques, des élèves ont cherché la valeur de k pour laquelle l'arc passe par le point $P(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ en $t = \frac{1}{2}$.

  En posant $t = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}k$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{8}k + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$ et on trouve ainsi facilement $k = \frac{4\sqrt{2}-4}{3} \cong 0,55228$.

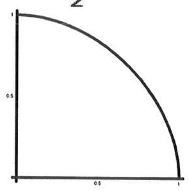
- D'autres élèves ont déterminé k de sorte que $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit le tiers du vecteur vitesse en $t = 0$ de l'arc de cercle décrit par

  $$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \qquad t \in [0;1].$$

  Ils ont ainsi obtenu $k = \frac{\pi}{6} \cong 0,52360$.

On peut vérifier, ici avec Mathematica, que pour $k = 0,5$ l'arc de Bézier ressemble à un arc de cercle.

```
ParametricPlot[{(1 - t)^3 + 3 (1 - t)^2 t + 3 1/2 (1 - t) t^2,
  3 1/2 (1 - t)^2 t + 3 (1 - t) t^2 + t^3}, {t, 0, 1}, AspectRatio → 1]
```



- La méthode des moindres carrés peut ici fournir une meilleure valeur de k. On pourrait ainsi chercher la valeur de k pour laquelle la somme des carrés des distances séparant les points de l'arc de Bézier de l'arc de cercle est minimale. Ceci reviendrait à déterminer le minimum de la fonction $a(k) = \int_0^1 \left(\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1 \right)^2 dt$.

Cette intégrale est toutefois difficile à calculer, même pour Mathematica. Pour simplifier les calculs, on peut minimiser une autre fonction :

$$a_2(k) = \int_0^1 \left(x(t)^2 + y(t)^2 - 1\right)^2 dt.$$

Les calculs peuvent se faire *à la main*, il est également possible d'utiliser Mathematica ou tout autre calculateur symbolique.

$$\texttt{x[t\_, k\_] := } (1-t)^3 + 3\,(1-t)^2\,t + 3\,k\,(1-t)\,t^2$$
$$\texttt{y[t\_, k\_] := } 3\,k\,(1-t)^2\,t + 3\,(1-t)\,t^2 + t^3$$
$$\texttt{d[t\_, k\_] := } (\texttt{x[t, k]}^2 + \texttt{y[t, k]}^2 - 1)^2$$
$$\texttt{a[k\_] := } \int_0^1 \texttt{d[t, k]}\, dt$$
$$\texttt{a[k]}$$
$$\frac{486}{5005} - \frac{4276\,k}{15015} + \frac{438\,k^2}{5005} + \frac{888\,k^3}{5005} + \frac{387\,k^4}{10010}$$
$$\texttt{a'[k]}$$
$$-\frac{4276}{15015} + \frac{876\,k}{5005} + \frac{2664\,k^2}{5005} + \frac{774\,k^3}{5005}$$

```
NSolve[a'[k] == 0]
{{k → -2.80402}, {k → -1.18981}, {k → 0.55197}}
```

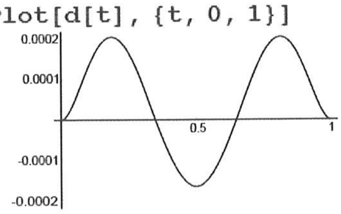
On obtient ainsi $k \cong 0{,}55197$, une valeur proche de celle fournie par la première méthode.

Les calculs précédents montrent déjà que l'arc de cercle et l'arc de Bézier seront fort semblables. Il est toutefois possible de calculer la plus grande différence radiale entre ces arcs pour les différentes valeurs de k obtenues. Nous allons pour cela déterminer les extremums de la fonction $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1$. Ces calculs sont effectués ci-dessous avec Mathematica pour $k \cong 0{,}55197$.

```
k = 0.5519703175158828`;
```

$$\texttt{x[t\_] := } (1-t)^3 + 3\,(1-t)^2\,t + 3\,k\,(1-t)\,t^2$$
$$\texttt{y[t\_] := } 3\,k\,(1-t)^2\,t + 3\,(1-t)\,t^2 + t^3$$
$$\texttt{d[t\_] = } \sqrt{\texttt{x[t]}^2 + \texttt{y[t]}^2} - 1$$
$$-1 + \sqrt{\left(\left((1-t)^3 + 3\,(1-t)^2\,t + 1.65591\,(1-t)\,t^2\right)^2 + \left(1.65591\,(1-t)^2\,t + 3\,(1-t)\,t^2 + t^3\right)^2\right)}$$

```
Plot[d[t], {t, 0, 1}]
```



```
NSolve[d'[t] == 0, t]
{{t → 1.}, {t → 0.813616}, {t → 0.5}, {t → 0.186384}, {t → 0.}}
d[0.1863836545991224`]
0.000206419
d[0.5]
-0.000166753
```

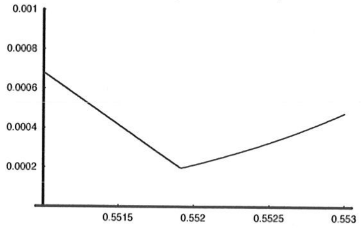
En prenant $k \cong 0,55197$ on obtient donc, en remplaçant l'arc de cercle par l'arc de Bézier, une erreur maximale de 0,021%.

En prenant $k = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$ l'erreur maximale est de 0,027%.

En prenant $k = \frac{\pi}{6}$ l'erreur maximale est de 1,52%.

Cette recherche de l'erreur maximale fournit une nouvelle méthode pour la quête d'une *bonne* valeur de *k*, nous pouvons chercher la valeur de *k* pour laquelle l'extremum de $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} - 1$ est, en valeur absolue, le plus petit possible. Mathematica nous offre à nouveau un moyen d'obtenir cette valeur par tâtonnement. Voici, sans autres explications, les commandes Mathematica qui permettent d'estimer cette valeur de *k*.

```
x[t_, k_] := (1 - t)^3 + 3 (1 - t)^2 t + 3 k (1 - t) t^2
y[t_, k_] := 3 k (1 - t)^2 t + 3 (1 - t) t^2 + t^3
d[t_, k_] = √(x[t]^2 + y[t]^2) - 1;
ListPlot[Table[{k , Max[Abs[d[
      ReplaceAll[t, Extract[NSolve[D[d[t, k], t] == 0, t],
        {2}]], k]], Abs[d[0.5, k]]]},
    {k, 0.551, 0.553, 0.00001}], PlotRange -> {0, 0.001}]
```



Pour $k \cong 0,551915$, on obtient en remplaçant l'arc de cercle par l'arc de Bézier, une erreur maximale de 0,020%.

En conclusion on peut affirmer que l'on ne voit aucune différence entre un *vrai* cercle et une courbe composée de quatre arcs de Bézier bien choisis.

Exercice
Trouver cette dernière estimation de *k* par une méthode directe, sans tâtonnements.

jean-marc.ledermann@rpn

Méthodes statistiques : de la théorie à la pratique

Un cours de la CRM organisé à Leysin du 19 au 22 septembre 2006

La CRM a organisé, en collaboration avec le CPS, un cours sur les méthodes statistiques, qui a réuni 45 participants à l'hôtel Central-Résidence de Leysin. Lors des deux premiers jours, Monsieur Jacques Zuber, professeur à la HEIG-VD d'Yverdon, après nous avoir rafraîchi la mémoire concernant les concepts fondamentaux utiles en statistique, nous a présenté les différentes méthodes utilisées pour analyser des données. M. Zuber nous a également montré quels étaient les moyens mis en œuvre dans la recherche de modèles statistiques à partir d'informations. Ces modèles permettent ensuite de faire des estimations, dans un certain intervalle de confiance. La dernière partie du cours était consacrée à l'inférence statistique et aux tests d'hypothèse. L'exposé de M. Zuber était enrichi de nombreux exemples, illustrés avec le logiciel R. Quelques séances d'exercices ont permis aux participants, si ce n'est de se familiariser avec ce logiciel, au moins d'en supposer les potentialités.

Le troisième jour, Monsieur Paul-André Salamin, collaborateur à l'Office fédéral de la statistique, nous a présenté les principales étapes nécessaires pour effectuer une enquête statistique, du plan de sondage pour définir un échantillon à la validation d'un estimateur pour évaluer une caractéristique d'une population. L'exposé de M. Salamin, très complet au niveau théorique, était illustré de nombreux exemples.

Le dernier jour, Madame Laura Raileanu, professeur à la HEIG-VD d'Yverdon, nous a présenté rapidement le Data Mining, ses concepts et quelques-unes de ses applications. Son exposé dense nous a montré les différents algorithmes utilisés pour analyser les données récoltées, que ce soit dans le domaine scientifique (astronomie) ou économique (Market Basket Analysis). La dernière partie de son exposé était consacrée aux règles d'associations logiques et aux arbres de décision.

Nous pouvons relever la qualité des intervenants qui, très à l'aise, ont su captiver un auditoire attentif et assidu. Le nombre de collègues inscrits ainsi que la qualité des échanges devraient encourager les responsables de l'éducation à développer de tels cours et à favoriser leur fréquentation, ceci dans un souci de maintenir un enseignement de qualité par des enseignants motivés.

Patrick Turtschy, septembre 2006

DPK

Doppelsterne und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Wir Physiklehrkräfte haben ja das Privileg, uns von der Physik inspirieren lassen zu dürfen, dann diesen Gedanken nachzuhängen und sogar noch einen Nutzen für unsere Arbeit daraus zu ziehen. So ist es mir neulich ergangen, als ich wieder mal Einstein gelesen habe: Ich fand ein neues Argument, wie man den Schülern die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit plausibel machen kann. Albert Einstein und Leopold Infeld haben folgende experimentelle Tatsache als Beweis angeführt[1]:

"Nun gibt es aber eine ganze Menge von Doppelsternsystemen, die aus zwei, einen bestimmten Punkt im Raum – den sogenannten gemeinsamen Schwerpunkt – umkreisenden Fixsternen bestehen. Die Beobachtung dieser Doppelsterne ergab, dass ihre Bewegungen dem Newtonschen Gravitationsgesetz unterliegen. Setzen wir nun wieder den Fall, dass die Geschwindigkeit des Lichtes von der des Körpers abhängt, der es ausstrahlt, so muss ein von dem Stern bei uns eintreffender Lichtstrahl beschleunigt oder verzögert werden je nachdem, wie schnell der Stern sich in dem betreffenden Augenblick in unserer Blickrichtung auf uns zu- oder von uns fortbewegt. Wäre dem so, dann würde die ganze Bewegung verwischt erscheinen, und man könnte bei den so weit entfernten Doppelsternen unmöglich nachweisen, dass sie dem gleichen Gravitationsgesetz gehorchen wie unser Sonnensystem. (...) Das Ergebnis unserer Überlegungen sieht, erhärtet durch speziellere technische Argumente, folgendermassen aus: Die Lichtgeschwindigkeit hängt nicht von der Bewegung der Lichtquelle ab."

Und prompt hielt mich folgender Gedanke ein paar Stunden vom Schlafen ab: Wie würde es denn aussehen, wenn sich Quellen- und Lichtgeschwindigkeit addierten? Was heisst "die Bewegung erscheint verwischt"? Da man selten die Möglichkeit hat, einen Gedanken Einsteins weiterzuführen, packte ich die Gelegenheit beim Schopf.

Theorie

Um die Rechnung übersichtlich zu halten, vereinfachte ich die Situation auf einen Stern, der sich gleichmässig im Kreis bewegt. Die Sichtlinie soll zudem in der Bahnebene liegen und das Kreiszentrum relativ zur Erde, unserem Beobachtungsort, ruhen. Die Situation ist in Abb. 1 gezeichnet. Der Abstand Stern-Erde ist näherungsweise (d >> r) $s = d - r\cos\varphi$. Nehmen wir ferner an, dass die Komponente der Sterngeschwindigkeit parallel zur Beobachtungsrichtung zur Lichtgeschwindigkeit dazukommt. Dann hat das ausgesandte Licht die Geschwindigkeit $c_{rel} = c - \upsilon\sin\varphi$ relativ zur Erde (klassische Addition der Geschwindigkeiten).

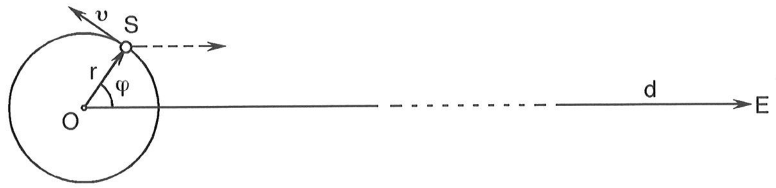


Abbildung 1: Ein Stern S kreist gleichmässig um ein Zentrum O und sendet Licht in Richtung Erde E. Die Kreisbahn hat Radius r, die Erde Abstand d >> r. Der Polarwinkel φ des Sterns wächst proportional zur Zeit und zur Bahngeschwindigkeit v, genauer $\varphi = v \cdot t'/r$

Der Quotient aus Abstand s und relativer Lichtgeschwindigkeit c_{rel} ist die Dauer, während welcher das Licht vom Stern zur Erde unterwegs ist. Addieren wir diese Dauer zur Sendezeit, so erhalten wir die Ankunftszeit t, bei der das Licht die Erde erreicht. Die Sendezeit ist proportional zum Polarwinkel φ. Es folgt:

$$t = \frac{\varphi \cdot r}{v} + \frac{d - r\cos\varphi}{c - v\sin\varphi} \qquad \text{(G)}$$

Umgekehrt könnten wir jetzt für eine bestimmte Ankunftszeit t berechnen, unter welchem Winkel φ man den Stern beobachtet. Unglücklicherweise ist Gleichung (G) transzendent. Wir können sie nur näherungsweise nach φ auflösen. Für einen ersten Überblick genügt es aber, wenn wir die Funktion $t(\varphi)$ graphisch darstellen (Abb. 2)

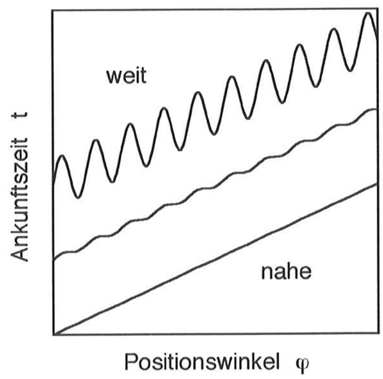


Abbildung 2: Ankunftszeit des Lichtes auf der Erde als Funktion des Polarwinkels des Sterns beim Aussenden (schematisch). Ist der Stern relativ nahe bei der Erde, so bemerkt man nichts Aussergewöhnliches: Der Stern bewegt sich gleichmässig im Kreis. Ist der Stern jedoch genügend weit entfernt, so kann später ausgesandtes, "schnelleres" Licht früher emittiertes, "langsameres" Licht überholen: Man sieht den Stern an mehreren Positionen gleichzeitig.

Ab welcher "kritischen" Distanz zum kreisenden Stern würde man ihn mehrfach sehen? Das "schnellste" Licht wird in Abb. 1 im "tiefsten" Punkt der Bahn ausgesandt, das langsamste oben. Die Grenze zwischen ein- und mehrfacher Sichtbarkeit des Sterns ist ungefähr dort, wo das schnellste und das langsamste Licht gleichzeitig auf der Erde ankommen. Aus (G) folgt

$$t = \frac{(\pi/2)\cdot r}{v} + \frac{d}{c-v} = \frac{(\pi/2+\pi)\cdot r}{v} + \frac{d}{c+v} \qquad \Rightarrow d = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right)\cdot r$$

Beispiel: Ein Doppelstern[2] (Bedeckungsveränderlicher) in der Andromedagalaxie in 2.52 Millionen Lichtjahren Entfernung hat Umlaufzeit 3.54969 Tage und Mittelpunktsabstand Stern-Stern 16.5 Sonnendurchmesser. Wir nehmen an, dass nur eine Komponente sichtbar sei (und $m_1 \approx m_2$). Die kritische Distanz ist mit diesen Werten:

$$r = \frac{16.5}{2} \cdot 2r_S = 16.5 \cdot 6.9599 \cdot 10^8 \text{ m} = 1.1482 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad ([3])$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1.1482 \cdot 10^{10} \text{ m}}{3.54969 \cdot 86400 \text{ s}} = 2.352 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\pi}{2}\left(\frac{c^2}{v^2} - 1\right) \cdot r = \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{(2.352 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2} - 1\right) \cdot 1.1482 \cdot 10^{10} \text{ m} = 2.93 \cdot 10^{16} \text{ m} = \underline{\underline{3.1 \text{ LJ}}}$$

Wäre die Lichtgeschwindigkeit abhängig von der Quellengeschwindigkeit, so sähe man das schon bei relativ nahen Doppelsternen: Sie würden die Bahn ziemlich ungleichmässig durchlaufen (gehorchten nicht dem Newtonschen Gravitationsgesetz) oder wären mehrfach sichtbar. Sehr weit entfernte Doppelsterne sähe man derart multipliziert, dass man tatsächlich sagen könnte, die Bahn sei verwischt.

Simulation

Man kann Gleichung (G) numerisch nach φ auflösen und alle Lösungen zu einem bestimmten Zeitpunkt graphisch darstellen.

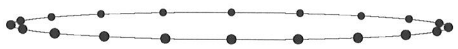


Abbildung 3: Periodisch aufgenommene Ansichten eines kreisenden Sterns, der nahe beim Beobachter ist (1% der oben berechneten, kritischen Distanz).

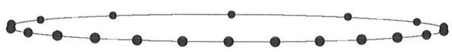


Abbildung 4: Periodisch aufgenommene Ansichten eines kreisenden Sterns, der 30% der oben berechneten, kritischen Distanz aufweist. Die Bahn wird bereits unregelmässig durchlaufen: Die Newton-Kepler'schen Gesetze gelten scheinbar nicht mehr.

Ab der kritischen Distanz ist der Stern mehrfach sichtbar und der hintere Bahnabschnitt wird scheinbar rückwärts durchlaufen. (Das ist im Druck schlecht darstellbar, aber eine animierte Version finden Sie unter www.dpk.ch/Material)

Quellen

[1] Albert Einstein und Leopold Infeld "Die Evolution der Physik" Rowohlt Verlag, Hamburg, 61.-70. Tausend, April 1958, Seiten 117-118

[2] http://www.astronomy.com/asy/default.aspx?c=a&id=3640, Aufruf am 19. April 2006

[3] DMK/DPK Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag, 9. Auflage

DPK Deutschschweizerische Physikkommission

Halbtag für Physik und Unterricht

Die DPK organisiert anlässlich der Jahrestagung der Schweiz. Physikalischen Gesellschaft (SPS) einen "teachers' afternoon"

Mittwoch, 21. Februar 2007, 14.00 - 17.00 Uhr
Uni Irchel Zürich, Saal G 30

Programm

14.00 - 15.30	Dr. Fritz Kubli: Regenbogen und Mond - oder: Optik und Gravitationstheorie im Physikunterricht (Erzählen im Unterricht) anschliessend Diskussion
15.30 - 16.00	Kaffeepause
16.00 - 17.00	Präsentation zweier Maturaarbeiten (Betreuer: Jerzy Sromicki, Kantonsschule Sursee): 16.00 Meinrad Sidler: Waves and Quanta 16.30 Linda Staub: Minimumprinzipien

Die entsprechenden Abstracts sind auf der Homepage der SPS aufgeschaltet unter
http://www.sps.ch/.pdf/SPS2007_Teacher.pdf

Eine Anmeldung ist nicht erforderlich, Kosten fallen für den teachers' afternoon keine an.

Die Euler-Methode, ein universelles didaktisches Konzept - ein Beitrag zum Euler-Jahr

Robert Märki, Gymnasium Thun-Schadau

Die *Euler-Methode* ist bekannt als ein einfaches numerisches Verfahren zur Lösung einer Differenzialgleichung oder eines Systems von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Da es genauere und effizientere Verfahren gibt, etwa Runge-Kutta, geriet die Euler-Methode etwas in Vergessenheit. Weniger bekannt ist allgemein, dass die Euler-Methode von hohem didaktischem Wert ist und bei der Vermittlung vieler wichtiger Konzepte der Differenzial- und Integralrechnung hervorragende Dienste leistet. Gerade ihre Einfachheit erlaubt es, den Blick auf die wesentlichen konzeptionellen Aspekte zu richten und sich nicht in technischen Details zu verlieren. Dies sei an einigen Beispielen erörtert:

1. Bei der Verwendung eines CAS ist es möglich und sinnvoll, auch in einem einführenden Kurs bereits Differenzialgleichungen zu behandeln. In einer diskreten Vorstufe handelt es sich dabei noch um Differenzengleichungen. Beispielsweise ist für die Lernenden das Newton'sche Abkühlgesetz $T'(t) = -k(T(t) - T_u)$ (T_u ist die Umgebungstemperatur) leicht nachvollziehbar. T', die Änderungsrate der Temperatur, ist intuitiv einfach das «Tempo», mit der sich der Körper abkühlt. Dass dieses Tempo von der Temperaturdifferenz abhängt, erfährt man oft im Alltag. Der Schritt zur Modellannahme, dass dieses Abkühltempo proportional zur Temperaturdifferenz sei, liegt dann sehr nahe. Die Euler-Methode erlaubt es nun, aus dieser Differenzialgleichung die Funktion $T = T(t)$ schrittweise approximativ zu konstruieren. Die Ableitung zeigt sich hier vor Allem unter dem Aspekt der «Änderungsrate», welcher zentraler ist als der Aspekt der «Tangentensteigung». In diesem Beispiel liefert die Euler-Methode erstens eine vertiefte Einsicht in den Ableitungsbegriff (Ändserungsrate), zweitens die Einsicht, dass eine Differenzialgleichung, zusammen mit einem Anfangswert eine Funktion definiert und drittens, damit zusammenhängend, einen intuitiven Zugang zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz (eine Differenzialgleichung erster Ordnung mit einem Anfangswert hat unter bestimmten Voraussetzungen genau eine Lösung).

2. Betrachtet man die Differenzialrechnung unter dem Gesichtspunkt der Differenzialgleichungen, dann ist es naheliegend, die Exponentialfunktionen durch die Differenzialgleichung $y' = ky$ zu definieren oder zumindest diese Differenzialgleichung in diesem Zusammenhang einzuführen. Betrachtet man das besonders einfache (normierte) Anfangswertproblem $y' = y$; $y(0) = 1$, dann ergibt sich die Definition der Zahl

e sofort aus der Lösung diese Anfangswertproblems, indem man $y(1)$ mit der Euler-Methode berechnet und dabei die Schrittweite $\Delta x = \frac{1}{n}$ verwendet. Die Euler-Methode liefert hier also eine Definition der Zahl e und zugleich eine Einsicht in die grosse Bedeutung dieser Zahl.

3. Hauptsatz: Löst man das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x)$; $y(a) = 0$ mit der Euler-Methode, indem man z. B. $y(b)$ berechnet, so zeigt sich, dass die Euler-Methode einfach eine Riemann-Summe von f über dem Intervall $[a; b]$ liefert. Andererseits ist es einfach einzusehen, dass $y(x) = F(x) - F(a)$ (F ist eine Stammfunktion von f) die Lösung des erwähnten Anfangswertproblems ist, also ist insbesondere $y(b) = F(b) - F(a)$. Daraus ergibt sich unmittelbar der Hauptsatz $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ohne den sonst üblichen langwiereigen Umweg über die Integralfunktion.

4. Dynamische Systeme: Da der grösste Teil der wichtigen und bedeutsamen Anwendungen der Differenzial- und Integralrechnung erst im Zusammenhang mit Differenzialgleichungen auftaucht und diese ein unentbehrliches Wekzeug beim mathematischen Modellieren sind, ist es sinnvoll, auch in einem allgemeinbildenden Unterricht dynamische Systeme zu betrachten. Die Euler-Methode liefert hier wiederum eine einfache Methode zum Auffinden und zum Verstehen von Lösungen.

Fazit: Auch wenn die Euler-Methode in mathematischer Hinsicht eine eher krude Methode ist und oft nicht Resultate hoher Genauigkeit liefert, kann sie bei einer grossen Vielfalt von Konzepten zu tieferen Einsichten führen, frei nach dem Motto: «Der Zweck von Berechnungen ist nicht ein Resultat sondern Einsicht». Oder anders ausgedrückt: Wenn das Ziel des Mathematikunterrichts darin besteht, *Konzepte* und nicht *Rezepte* zu vermitteln, dann liefert die Euler-Methode dabei hervorragende Dienste.

Bemerkung: Ein Unterrichtsskript für die Einführung in die Differenzial- und Integralrechnung, welches Differenzialgleichungen und die Euler-Methode zentral verwendet, ist zu beziehen über http://www.romae.ch

Zufall als Quelle der Effizienz
Eine der Brücken zwischen Mathematik und Informatik

Teil 1: Das Konzept der Zufallssteuerung

Der Zufall ist nur dem vorbereiteten Geist gewogen,
denn ein unvorbereiteter Geist sieht nicht die Hand,
die ihm das Glück reicht.

Louis Pasteur

Juraj Hromkovič, ITE ETH Zürich, ETH Zentrum CAB F16, 8092 Zürich

Abstrakt

Dieser Artikel ist eine freie Fortsetzung des Artikels über die Beiträge des Informatikunterrichts für die Mittelschulen. Sein Ziel ist es, die starke Verbindung zwischen Mathematik und Informatik zu illustrieren und den Leser davon zu überzeugen, dass Informatik als Gymnasialfach nicht als Konkurrenz, sondern als Stärkung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zu betrachten ist. Der Artikel besteht aus zwei Teilen. In diesem ersten Teil wird das Konzept des Entwurfs von zufallsgesteuerten Systemen vorgestellt.

Einführung

Wir wollen hier Zufall als ein Zaubermittel zur Lösung von algorithmischen Problemen vorstellen und dadurch zeigen, wie die Algorithmik den Unterricht in der Wahrscheinlichkeitstheorie bereichern kann. Die folgende Präsentation ist eine wesentlich verkürzte Darstellung des Themas Zufall in den Naturwissenschaften und in der Algorithmik aus dem Buch „Sieben Wunder der Informatik“, das vor kurzem beim Teubner-Verlag erschienen ist. Auf der anderen Seite ist dieser Artikel eine Erweiterung der Darstellung des Themas im Buch, indem hier fachdidaktische Aspekte und die Verbindung zur Mathematik angesprochen werden.

Würden Sie auf Anhieb glauben, dass Systeme mit geschickter Zufallssteuerung ihr Ziel Billionen Mal schneller erreichen können, als es jedes vollständig deterministische System schaffen kann? Und dass man diese riesige Beschleunigung erreichen kann, ohne dafür mit mehr zu bezahlen[1] als dem Risiko 1 zu 10^{18} (dies entspricht ungefähr dem Alter des Universums in Sekunden), ein falsches Resultat geliefert zu bekommen? Das Risiko ein falsches Resultat zu liefern, nennen wir **Fehlerwahrscheinlichkeit**.

Jedes hundertprozentig zuverlässige klassische Programm, das mehrere Tage zu seiner Berechnung braucht, ist in der Praxis unzuverlässiger als ein zufallsgesteuertes Programm, das in ein paar Sekunden mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $1/10^{18}$ seine Rechnungen durchführt. Die Wahrscheinlichkeit, ein falsches Resultat infolge eines Hardwarefehlers in mehrtägiger Berechnung zu liefern, ist unvergleichbar höher als $1/10^{18}$. Also ist die Sicherheit, die wir durch den Wechsel zu zufallsgesteuerten Algorithmen verlieren, sowieso nur scheinbar (existiert in der Realität nicht). Eine solche scheinbare Sicherheit zu verlieren, tut dann nicht so weh. Insbesondere wenn das Risiko, durch Zufallsverwendung in der Systemsteuerung einen Fehler zu machen, so klein ist, dass man während des ununterbrochen wiederholten Praktizierens des zufallsgesteuerten Algorithmus in Milliarden von Jahren erwartungsgemäß mit höchstens einem einmaligen Auftreten eines Fehlers rechnen muss.

Am Ende dieses Artikels sollen Sie nicht nur mit einem konkreten zufallsgesteuerten System und seinen Vorteilen eine tiefere Bekanntschaft gemacht haben. Sie werden auch die Möglichkeit haben, noch tiefer die Grundideen der Randomisierung (der Verwendung des Zufalls zur Steuerung von Algorithmen) kennenzulernen und dabei auch ein bisschen ein Gespür dafür zu gewinnen, warum es überhaupt solche unglaublichen und wunderbaren Wege zu Problemlösungen gibt.

Der Artikel ist wie folgt strukturiert. Zuerst erklären wir, was zufallsgesteuerte Systeme sind, dann geben wir ein Beispiel eines zufallsgesteuerten Systems und schliesslich erklären wir, wie man dies im Unterricht mit der Mathematik in Verbindung bringen und üben kann.

Was ist ein zufallsgesteuerter Algorithmus?

Wir betrachten ein einfaches Beispiel zu einer Aufgabe, die durch die Verwendung des Zufalls sehr effizient gelöst werden kann und von der man weiß, dass sie deterministisch (ohne den Zufall) nicht effizient lösbar ist. Es wird ein Beispiel sein, das wirklich jede und jeder in die Hand nehmen kann, um

[1] Bei dem Entwurf eines zufallsgesteuerten Systems bezahlen wir meistens die Ersparnis von Rechenaufwand mit dem Verlust der Sicherheit, immer das richtige Ergebnis zu liefern.

selbstständig eigene Erfahrungen über die Stärke der Zufallssteuerung zu machen.

Was genau bedeutet es, wenn man über ein **zufallsgesteuertes (randomisiertes)** System oder Programm spricht? Im Prinzip erlaubt man zwei grundlegende anschauliche Darstellungen. Jedes deterministische Programm hat auf jeder Eingabe eine eindeutige Folge von Rechenschritten, wir sagen eine eindeutige Berechnung, durchzuführen. Ein zufallsgesteuertes Programm (System) kann sehr viele unterschiedliche Berechnungen auf einer Eingabe ermöglichen, und der Zufall entscheidet, welche davon wirklich realisiert wird. Nachfolgend stehen die zwei Möglichkeiten für die Wahl einer Berechnung aus mehreren möglichen Berechnungen.

1. Das Programm arbeitet deterministisch[2] bis auf einige Stellen, wo es eine Münze werfen darf. Abhängig von dem Resultat des Wurfes (Kopf oder Zahl), wählt es an dieser Stelle eine der zwei unterschiedlichen Möglichkeiten, seine Arbeit fortzusetzen.
   Um diese Art der Zufallssteuerung in einer Programmiersprache einzuführen, reicht es, die folgende zusätzliche Instruktion einzuführen.

   ```
   Wirf eine Münze. Falls „Kopf“ go to i else go to j
   ```

   Somit setzt das Programm die Arbeit in der Zeile i, falls „Kopf“ gefallen ist und in der Zeile j, falls „Zahl“ gefallen ist, fort.
2. Das zufallsgesteuerte Programm hat am Anfang eine Auswahl von mehreren deterministischen Strategien. Das Programm zieht zufällig eine dieser Strategien und wendet sie auf die aktuelle Eingabe an. Der Rest der Berechnung ist vollständig deterministisch. Bei jeder neuen Eingabe wird zufällig eine neue Strategie gewählt.

Die zweite Art, zufallsgesteuerte Systeme zu modellieren, ist einfacher und deswegen werden wir sie in unserem Musterbeispiel verwenden.

Ein zufallsgesteuertes Kommunikationsprotokoll

Betrachten wir die folgende Aufgabenstellung.

Wir haben zwei vernetzte Rechner R_I und R_{II}, die sich an zwei unterschiedlichen, weit voneinander entfernten Orten befinden. Die Aufgabe der Rechner ist es, die gleiche große Menge von Daten (z.B. eine Genomdatenbank) zu verwalten. Ursprünglich haben beide Rechner ihre Arbeit mit gleichen

[2] eindeutig bestimmt

Inhalten der Datenbank begonnen, die sich aber im Laufe der Zeit dynamisch geändert haben, weil ständig neue Informationen (z.B. neue dekodierte DNA-Sequenzen) gespeichert werden müssen. Beide Rechner versuchen dabei die vollständigen Informationen über die betrachteten Objekte zu speichern, und somit sollen beide Rechner immer den gleichen Speicherinhalt haben. Natürlich will man von Zeit zu Zeit auch überprüfen, ob die Inhalte der beiden Datenbanken von R_I und R_{II} wirklich identisch sind.

Diese Überprüfung idealisieren wir jetzt im Sinne der mathematischen Abstraktion. Die Inhalte der Datenbanken betrachten wir als Folgen von Bits. Somit hat der Rechner R_I die Folge x von n Bits

$$x = x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n$$

in seinem Speicher und der Rechner R_{II} hat auch eine Folge von n Bits in seinem Speicher, bezeichnet als

$$y = y_1y_2y_3 \ldots y_{n-1}y_n.$$

Die Aufgabe ist, mittels Kommunikation über das Netz zu überprüfen, ob $x = y$ (Fig. 1).

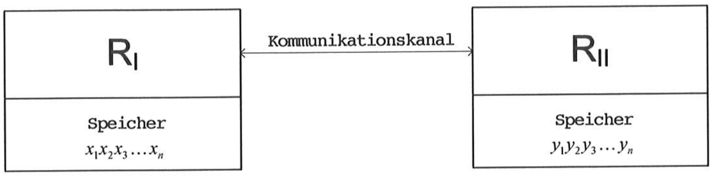


Abbildung 1:

Um diese Kommunikationsaufgabe zu lösen, soll man eine Kommunikationsstrategie (ein **Kommunikationsprotokoll**) entwerfen.
Die **Komplexität der Kommunikation** und damit die Komplexität der Lösung der Aufgabenstellung misst man in der Anzahl der Bits, die R_I und R_{II} über den Kommunikationskanal austauschen.

Leider ist es beweisbar, dass jedes deterministische Kommunikationsprotokoll zur Lösung dieser Aufgabe nicht vermeiden kann, für mehrere Speicherinhalte n Bits auszutauschen. Somit ist der naive Lösungsweg, bei dem R_I den ganzen Inhalt $x_1x_2 \ldots x_n$ seines Speichers an R_{II} schickt und R_{II} dann die Inhalte bitweise vergleicht, die bestmögliche Lösungsstrategie. Wenn n sehr groß ist, z.B. $n = 10^{16}$ (das entspricht einem Datenbestand von 250000 DVDs), sind die Kommunikationskosten sehr hoch. Abgesehen davon ist die zuverlässige

Übertragung einer solchen Menge von Daten ohne den Verlust oder Änderung von Bits ein unrealistisches Vorhaben.

Unser Ziel ist jetzt, ein zufallsgesteuertes Kommunikationsprotokoll zu entwerfen, das diese Aufgabe mit

$$4 \cdot \lceil \log_2(n) \rceil$$

Kommunikationsbits realisieren kann. Wir sehen, dass die Ersparnis an Komplexität von exponentieller Größe ist. Für $n = 10^{16}$ schicken wir zum Beispiel nur 256 anstatt 10^{16} Bits!

Für die Darstellungen der zufallsgesteuerten Kommunikationsstrategie ist es anschaulicher, über den Vergleich von zwei natürlichen Zahlen statt über den Vergleich von zwei Bitfolgen zu sprechen. Deswegen interpretieren wir die Folgen $x = x_1 \ldots x_n$ und $y = y_1 \ldots y_n$ als die binären Kodierungen der Zahlen

$$\textbf{Zahl}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot x_i \quad \text{und} \quad \textbf{Zahl}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot y_i$$

Wichtig ist nur zu bemerken, dass

$$0 \leq \mathrm{Zahl}(x) \leq 2^n - 1 \text{ und } 0 \leq \mathrm{Zahl}(y) \leq 2^n - 1.$$

Für $n = 10^{16}$ können diese Zahlen natürlich riesig groß sein. Offensichtlich ist x genau dann identisch zu y, wenn $\mathrm{Zahl}(x) = \mathrm{Zahl}(y)$.

Das zufallsgesteuerte Kommunikationsprotokoll für Eingaben $x_1 \ldots x_n$ und $y_1 \ldots y_n$ der Länge n entspricht einer zufälligen Wahl aus so vielen deterministischen Strategien (Protokollen), wie die Anzahl $\mathrm{Prim}(n^2)$ der Primzahlen kleiner als n^2 ist.

Im Folgenden bezeichnen wir für jede positive ganze Zahl m durch

$$\mathrm{PRIM}(m) = \{p \text{ ist eine Primzahl} \mid p \leq m\}$$

die Menge aller Primzahlen in dem Intervall von 1 bis m und durch

$$\mathrm{Prim}(m) = |\mathrm{PRIM}(m)|$$

die Anzahl der Primzahlen in $\mathrm{PRIM}(m)$. Im Folgenden bezeichnen wir mit

$$r = a \bmod b$$

den Rest bei der ganzzahligen Division $a : b$. Wenn c der ganze Teil der Division $a : b$ ist, so kann man schreiben:

$$a = b \cdot c + r$$

wobei $r < b$.

Jetzt können wir das zufallsgesteuerte Protokoll für den Vergleich von x und y (besser gesagt für den Vergleich von Zahl(x) und Zahl(y)) wie folgt beschreiben. Die Idee ist es, statt die Zahlen direkt zu vergleichen, ihre zufällig gewählten „Fingerabdrücke" zu vergleichen. Die Fingerabdrücke sollen einerseits möglichst klein sein, um einen effizienten Vergleich zu ermöglichen. Andererseits sollen sie genügend repräsentativ sein, um falsche Vorstellungen über die Zahlen zu vermeiden.

Zufallsgesteuertes Kommunikationsprotokoll ZEUGE für die Identitätsüberprüfung.

Ausgangssituation: Der Rechner R_I hat n Bits $x = x_1x_2 \ldots x_n$ (d.h. eine Zahl Zahl(x), $0 \leq$ Zahl(x) $\leq 2^n - 1$).
Der Rechner R_{II} hat n Bits $y = y_1y_2 \ldots y_n$ (d.h. eine Zahl Zahl(y), $0 \leq$ Zahl(y) $\leq 2^n - 1$).

Phase 1: R_I wählt zufällig eine Primzahl p aus PRIM(n^2). Jede Primzahl in PRIM(n^2) hat dabei die gleiche Wahrscheinlichkeit gewählt zu werden.

Phase 2: R_I berechnet die Zahl (den Fingerabdruck von Zahl(x)

$$s = \text{Zahl}(x) \bmod p$$

(d.h. den Rest nach dem Teilen von Zahl(x) durch p) und schickt die binäre Darstellung von

$$s \text{ und } p$$

an R_{II}.

Phase 3: Nach dem Empfang von s und p berechnet R_{II} die Zahl

$$q = \text{Zahl}(y) \bmod p.$$

Falls $q \neq s$, dann liefert R_{II} die Ausgabe „ungleich".
Falls $q = s$, dann liefert R_{II} die Ausgabe „gleich".

Bevor wir die Kommunikationskomplexität und die Zuverlässigkeit von ZEU-

GE untersuchen, illustrieren wir die Wirkung des Protokolls auf eine konkrete Eingabe.

Beispiel 1 Seien $x = 01111$ und $y = 10110$.
Somit sind

$$\begin{aligned} \text{Zahl}(x) &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15, \\ \text{Zahl}(y) &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 16 + 4 + 2 = 22 \end{aligned}$$

und

$$n = 5.$$

Also ist $n^2 = 25$ und somit ist

$$\text{PRIM}(n^2) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

Damit hat das Kommunikationsprotokoll ZEUGE eine von 9 Primzahlen zu wählen und somit die Auswahl aus 9 deterministischen Protokollen.
Nehmen wir an, R_I wählt die Primzahl 5. Dann rechnet R_I

$$s = 15 \bmod 5 = 0$$

und schickt die Zahlen $p = 5$ und $s = 0$ an R_{II}. Dann rechnet R_{II}

$$q = 22 \bmod 5 = 2.$$

Weil $2 = q \neq s = 0$, antwortet R_{II} korrekt

„x und y sind ungleich".

Nehmen wir jetzt an, dass R_I die Primzahl 7 aus PRIM(25) wählt. Dann rechnet R_I

$$s = 15 \bmod 7 = 1$$

und schickt die Zahlen $p = 7$ und $s = 1$ an R_{II}. Dann rechnet R_{II}

$$q = 22 \bmod 7 = 1.$$

Weil $q = s$, antwortet R_{II} fälschlicherweise

„x und y sind gleich".

Wir sehen damit, dass sich ZEUGE irren kann und für gewisse Wahlen von Primzahlen eine falsche Antwort geben kann. □

An dieser Stelle können die Schüler ein paar Übungsaufgaben bearbeiten.

Aufgabe 1 Gibt es noch eine andere Primzahl in PRIM(25), die für $x = 01111$ und $y = 10110$ zu einer falschen Antwort von ZEUGE führen kann?

Aufgabe 2 Seien die Eingaben $x = y = 100110$. Kann es vorkommen, dass ZEUGE bei einer schlechten Primzahlwahl die falsche Antwort „$x \neq y$“ liefert?

Aufgabe 3 Betrachten Sie $x = 10011011$ und $y = 01010101$ als Eingaben. Stellen Sie fest, bei wievielen Primzahlen ZEUGE die falsche Antwort „$x = y$“ und bei wievielen Primzahlen ZEUGE die richtige Antwort „$x \neq y$“ liefert!

Schauen wir uns zuerst an, wie groß die Komplexität der Kommunikation bei ZEUGE ist. Die zu vergleichenden Zahlen sind jeweils durch n Bits dargestellt und liegen somit im Intervall von 0 bis $2^n - 1$. Um das Senden von großen Zahlen zu vermeiden, kommuniziert der Rechner R_I im Protokoll ZEUGE nur zwei Zahlen kleiner als n^2, nämlich die Primzahl $p \in PRIM(n^2)$ und den Rest nach dem Teilen durch p. Eine Zahl kleiner als n^2 kann man binär durch

$$\lceil \log_2 n^2 \rceil \leq 2 \cdot \lceil \log_2 n \rceil$$

Bits darstellen.

Weil das Protokoll ZEUGE zwei Zahlen p und s schickt, kann jede durch genau $2\lceil \log_2 n \rceil$ Bits dargestellt werden und somit ist die gesamte Anzahl von ausgetauschten Bits in ZEUGE genau

$$4 \cdot \lceil \log_2 n \rceil .$$

Schauen wir mal, was dies genau für $n = 10^{16}$ bedeutet. Das beste deterministische Protokoll kann bei einigen Eingaben nicht vermeiden, mindestens

$$10^{16} \text{ Bits}$$

auszutauschen. Unser randomisiertes Protokoll ZEUGE kommt immer mit

$$4 \cdot \lceil \log_2(10^{16}) \rceil \leq 4 \cdot 16 \cdot \lceil \log_2 10 \rceil = 256 \text{ Bits}$$

aus. Der Unterschied im Aufwand beim Senden von 256 Bits und von 10^{16} Bits ist riesig. Auch wenn es tatsächlich möglich wäre, die 10^{16} Bits sicher zu kommunizieren, sind die Kommunikationskosten für das Senden von 256 Bits und 10^{16} Bits unvergleichbar. Für diese unglaublich große Ersparnis an Kommunikationskomplexität bezahlen wir mit dem Verlust der Sicherheit, immer das richtige Ergebnis des Vergleichens zu erhalten. Unsere Frage ist jetzt:

> *Wie groß ist die Unsicherheit, mit der wir diese drastische Reduktion der Kommunikationskosten zu bezahlen haben?*

Eidgenössische Maturitätsprüfungen ETH-Aufnahmeprüfungen

Die *Eidgenössischen Maturitätsprüfungen* sind für die Sprachen *d, f, i* unter den Adressen

- http://www.sbf.admin.ch/htm/bildung/matur/disziplin-d.html
- http://www.sbf.admin.ch/htm/bildung/matur/disziplin-f.html
- http://www.sbf.admin.ch/htm/bildung/matur/disziplin-i.html

zu finden.

Die *Aufnahmeprüfungen der ETH* für Mathematik, Physik und Angewandte Mathematik sind unter der Adresse

- http://www.vsmp.ch/vsmp/poly/ap/

erreichbar.

Urs Oswald

Knoten in der Mathematik

Meike Akveld, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Knoten gibt es überall. Jeder braucht Knoten, sei es um die Zeitungen zusammenzuschnüren, ein Seil zu befestigen oder die Schuhe zu binden. Aber mathematische Knoten – was sind das?

Definition: Ein Knoten ist eine glatte, 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit S^3.

In etwas weniger gehobener Sprache stellen wir uns einen Knoten am besten aus einem Stück Schnur her. Nehmen Sie also eine recht dicke Schnur in die Hand und verknoten Sie sie ganz nach Belieben. Jetzt kommt der handwerklich schwierige Teil: Die beiden Enden der Schnur müssen so zusammengefügt werden, dass man gar nicht mehr merkt, dass dort einmal ein Unterbruch war. Auch wenn Ihnen das kaum gelingt, können Sie diese unschöne Flickstelle in Ihrer Vorstellung einfach wegdenken – und schon haben Sie einen mathematischen Knoten.

Das Ziel der Mathematik ist, diese Knoten zu klassifizieren, d.h. eine Liste aller verschiedenen Knoten zu erstellen. Dabei muss man entscheiden können, wann zwei Knoten gleich sind und wann nicht. In der Mathematik heissen zwei Knoten **gleich**, wenn man den einen durch Deformieren in den anderen überführen kann. Unter Deformieren verstehen wir das Umherführen von Schnurstücken des Knotens, ohne eine Schere zur Hand zu nehmen.

Der einfachste Knoten ist der Unknoten, der sich durch Deformieren in eine o-förmige Schlaufe auflösen lässt. Was ist nun der nächst kompliziertere Knoten? Wenn Sie ein bisschen mit einer Schnur herumspielen, kommen Sie wahrscheinlich schnell zum Beispiel in der Abbildung 1. Diese Abbildung stellt ein so genanntes **Knotendiagramm** des Kleeblattknotens dar.

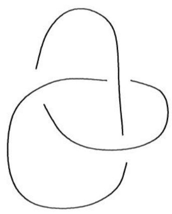


Abbildung 1: Das Kleeblatt

Wenn man etwas länger mit diesem Knoten herumspielt, kommt man zum Schluss, dass dieser Knoten sich nicht durch Deformieren in den Unknoten umformen lässt. Aber wie können wir dies beweisen?

In diesem Artikel möchte ich zuerst die Methode der Dreifärbbarkeit einführen und damit beweisen, dass das Kleeblatt tatsächlich verschieden ist von dem Unknoten. Danach werde ich skizzieren wie man zeigen kann, dass die Dreifärbbarkeit wirklich eine Knoteninvariante ist.

Schliesslich sehen wir, dass auch diese Methode bald an ihre Grenzen stösst und werfen einen kleine Blick in die grosse Welt der Knotentheorie.

1 Dreifärbbarkeit

Eine Methode, mit der man gewisse Dinge als gleich und gewisse Dinge als verschieden bezeichnen kann, beruht in der Mathematik auf so genannten **Invarianten**, also Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man die Objekte unwesentlich verändert. Das heisst für uns jetzt, dass wir Eigenschaften eines Knotens suchen, die sich nicht ändern, wenn wir den Knoten deformieren. Eine solche Eigenschaft ist die Dreifärbbarkeit, die wie folgt definiert ist. Ein Knoten ist **3-färbbar**, wenn man das Knotendiagramm mit drei Farben färben kann, wobei die folgenden Regeln eingehalten werden müssen:

- Man färbt jedes Schnurstück so mit einer einzigen Farbe ein, dass sie nicht wechselt, bis die Linie im Knotendiagramm abbricht. Das bedeutet: Zwischen zwei aufeinander folgenden Kreuzungen, an denen die Schnur unten liegt, wird immer nur eine Farbe verwendet.
- An jeder Kreuzung stossen entweder eine oder drei Farben zusammen.
- Beim Färben des Knotendiagramms müssen alle drei Farben benützt werden.

Es ist leicht einzusehen, dass der Unknoten nicht 3-färbbar ist – man braucht nur eine Farbe. Auch wenn man ihn anders hinlegt (siehe Abb. 2), gelingt es nicht, ihn mit drei Farben einzufärben. Das Kleeblatt lässt sich aber gut mit drei Farben einfärben und ist damit dreifärbbar (machen Sie dies selber). Somit hätten wir bewiesen dass diese beide Knoten in der Tat nicht gleich sind.

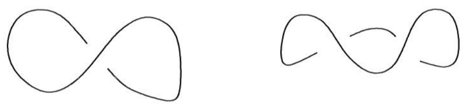


Abbildung 2: Varianten zu dem Unknoten

2 Knoteninvarianten

Wieso aber ist Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante? Eine Knoteninvariante soll die Eigenschaft haben, dass – egal wie man den Knoten deformiert–, die Invariante unverändert bleibt. Wie wir schon gesehen haben, betrachten wir oft statt den in $\mathbb{R}^3$ eingebetteten Knoten seine Projektion auf einer Ebene. Das heisst also, dass zwei verschiedene Projektionen des gleichen

Knotens die gleichen Invarianten oder Eigenschaften haben sollten. Wie lässt sich dies überhaupt überprüfen? Jeder Knoten hat unendlich viele verschiedene Projektionen.

Wenn wir einen Knoten deformieren, um ihn zu vereinfachen oder um ihn in eine besser erkennbare Form zu bringen, heisst das, dass wir Schnurstücke hin und her schieben und dabei neue Kreuzungen kreieren oder alte vernichten. Wir machen das mehr oder weniger instinktiv und merken, was wohl am sinnvollsten ist. Im Jahr 1929 wollte der Knotentheoretiker Kurt Reidemeister (1893-1971) über das einfache Probieren hinausgehen und herausfinden, wie viele verschiedene Deformierungsschritte überhaupt möglich sind. Überraschend stellte er fest, dass sich die Knotendiagramme von zwei gleichen Knoten mit nur drei Sorten von Schritten, den so genannten **Reidemeister-Schritten**, ineinander überführen lassen (siehe Abb. 3). Der Beweis dafür ist nicht sehr schwierig, aber es würde zu weit führen, ihn hier zu besprechen. Jedenfalls leuchtet ein, dass die drei Reidemeister-Schritte einen Knoten sicher nicht verändern. Überraschend ist eher, dass es nichts Komplizierteres braucht.

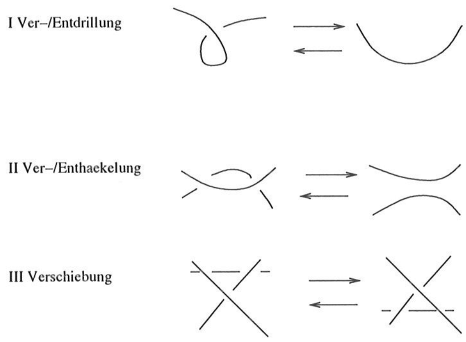


Abbildung 3: Die drei Reidemeister-Schritte

Der Beweis, dass Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist, besteht darin zu zeigen dass diese Eigenschaft unverändert bleibt unter den drei Reidemeister-Schritten. Um dies zu zeigen, stellen wir uns vor, wir hätten vor uns ein Knotendiagramm von einem 3-färbbaren Knoten. Jetzt wollen wir das Diagramm mit einem der drei Reidemeister-Schritte ändern und schauen, ob es danach immer noch 3-färbbar ist. Man kann sich vorstellen, dass diese Änderung nur in einem kleinen Teil des Knotendiagramms stattfindet, und wir werden diesen Teil umkreisen. Innerhalb dieses Kreises werden wir einen Reidemeister-Schritt ausführen, die Regeln der Dreifärbbarkeit bei einer allfälligen Neufärbung einhalten und darauf achten, dass die den Kreis verlassenden Schnurstücke die gleiche Farbe wie zuvor behalten. Damit erreichen wir, dass ein Knoten, der 3-färbbar war, auch nach dem Reidemeister-Schritt immer noch 3-färbbar ist.

Als Beipsiel schauen wir uns den Reidemeister-Schritt II an. Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Beide Schnurstücke haben entweder die gleiche Farbe oder verschiedene (siehe Abb. 4).

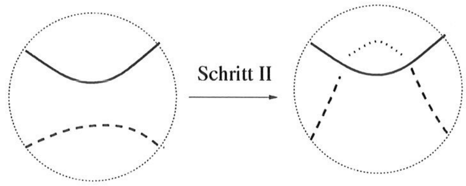


Abbildung 4: Dreifärbbarkeit unter Reidemeister-Schritt II

Wenn wir – im Fall von zwei Farben – jetzt die Verhäkelung durchführen, bleibt uns nur eine Möglichkeit, das neu entstandene Schnurstück einzufärben. Da die vier Ausgänge ihre Farbe beibehalten müssen, treffen an den beiden neuen Kreuzungen schon zwei Farben aufeinander, was bedeutet, dass das neu entstandene Schnurstück mit der dritten Farbe gefärbt werden muss. So sind die Regeln der Dreifärbbarkeit innerhalb des Kreises eingehalten, weil sich an jeder Kreuzung drei Farben treffen. Damit bleibt in diesem Fall beim Reidemeister-Schritt II die Dreifärbbarkeit erhalten. Auf ähnlicher Weise lassen sich auch die andere Variante zum Schritt II sowie die anderen Schritte beweisen. Damit haben wir bewiesen, dass Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist und der Unknoten also nicht gleich dem Kleeblatt ist.

3 Noch ein Beispiel

Betrachten Sie die drei Knoten in Abbildung 5. So wie sie hier dargestellt sind, zeigen alle drei sechs Kreuzungen. Versucht man diese Knoten mit weniger Kreuzungen zu projizieren, wird man sehen, dass dies nicht gelingt. Sind diese drei Knoten doch aber gleich?

Abbildung 5: Drei Knoten mit sechs Kreuzungen

Beweisen Sie mit Hilfe der Dreifärbbarkeit, dass mindestens zwei der drei Diagramme zu Knoten gehören die verschieden sind.

4 Wie es weiter geht...

Die drei Knoten in Abbildung 5 sind tatsächlich die einzigen drei Knoten mit Kreuzungszahl sechs – und alle sind verschieden. Um dies zu beweisen, reicht die Dreifärbbarkeit leider nicht. Sie unterteilt die Knoten nur in zwei Gruppen: 3-färbbar oder nicht. Es gibt in der Knotentheorie eine Reihe weiterer Methoden, um Knoten voneinander unterscheiden zu können. In "Knoten in der Mathematik; Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln" [1] stelle ich einige andere Knoteninvarianten vor – als Höhenpunkt das Jonespolynom. Diese Invariante ordnet jedem Knoten ein Polynom zu. Der neuseeländische Mathematiker Vaughan Jones wurde für diese neue Knoteninvariante im Jahr 1990 mit der Fieds-Medaille geehrt. Dieses Themenheft besteht im Prinzip aus zwei Teilen: Die ersten fünf Kapitel sind durchaus für das Untergymnasium zugänglich. Die letzten zwei Kapitel sind eher für die Oberstufe gedacht und erfordern eine gewisse Sicherheit im Umgang mit algebraischen Umformungen [2].

[1] Themenheft Knoten in der Mathematik; Ein Spiel mit Schnüren, Bildern und Formeln, Meike Akveld, herausgegeben durch die DMK bei Orell Füssli

[2] Es folgt eine Weiterbildung zu diesem Thema im Herbst 2007

Verkommt der mathematische Formelsatz?

osurs@bluewin.ch Urs Oswald www.ursoswald.ch

Ein kurzer Blick in populäre Mathematik- und Physikbücher kann gelegentlich ungläubiges Staunen erwecken. Da findet man, inmitten von überschwänglichem graphischem Aufwand, Formeln von der Art

$$\frac{\mathrm{2x+1}}{\mathrm{3-x}} = \text{-3}$$

oder

$$\frac{2}{\mathrm{x+2}} +7 = \frac{8}{\mathrm{x+2}}.$$

Weit verbreitet sind auch Terme wie

$$(\frac{\mathrm{a}\sqrt{10}}{2}+1)(\frac{\mathrm{a}\sqrt{10}}{2}-1).$$

Offenbar hat das Geld für die prächtige Bilderflut gereicht, aber nicht mehr für ein Textsystem, welches (in einem Mathematikbuch!) mit mathematischen Ausdrücken kompetent umgehen kann.

In aufwendig erstellten Physikbüchern sieht man

$$\mathrm{E}{=}\frac{\mathrm{m}}{2}\,\mathrm{v}^2$$

und ähnliche Ausdrücke. Das Bestreben, Brüche möglichst zu vermeiden, führt häufig zu Fehlern. Man kann in den Resultatangaben von ein und derselben Aufgabe sowohl

$$\ldots/\mathrm{m{\cdot}N} \quad \text{als auch} \ldots/(\mathrm{m{\cdot}N})$$

finden, wenn ... $\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{N}^{-1}$ gemeint ist. Was hat man davon zu halten, wenn zwar ein gewaltiger graphischer Aufwand getrieben, mit der Mathematik aber nachlässig umgegangen wird?

Die mathematische Typographie hatte sich spätestens in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts zu einem wahren Kunsthandwerk entwickelt. So sollte bei der Addition von Brüchen klar ausgedrückt werden, dass weder die Zähler noch die Nenner, sondern die *Brüche* die Summanden sind. Klammern sollten die von ihnen abgegrenzten Teile wirklich umfassen.

Ziel war nicht primär das schöne Bild; vielmehr sollte die Form den mathematischen Inhalt optimal ausdrücken. Deshalb unterscheidet man zwischen

$$\sin \quad (\text{in } \sin\alpha) \quad \text{und} \quad sin \quad (= s\cdot i\cdot n).$$

Blättert man durch frühere Klassiker, so ergibt sich, dass auch sie nicht alle mit derselben Strenge abgefasst sind. Auf die grösste Konsequenz bin ich ausgerechnet in den Lehrbüchern eines bekannten – Physikers gestossen. Arnold Sommerfeld präsentiert in seinem Band über Mechanik die Formel

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -a\,\frac{g/l}{\sqrt{u^2+g/l}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\sin\sqrt{u^2+g/l}\,t\,.$$

Variable sind kursiv gedruckt, nicht aber der Ableitungsoperator oder die *mathematischen* Konstanten e und i. Im Band über Wärmelehre taucht die Formel

$$\left(c_v+\frac{R}{\mu}\right)p\mathrm{d}v + c_v v\mathrm{d}p = 0$$

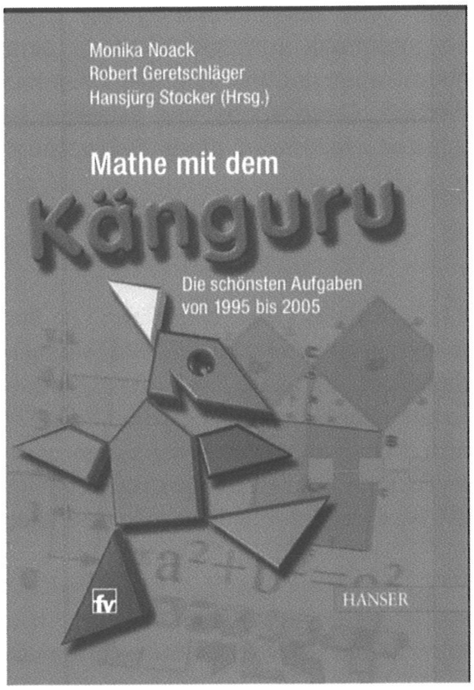
auf. Wie die Erdbeschleunigung g in der vorhergehenden Formel, wird auch die universelle Gaskonstante R nicht als mathematische Konstante behandelt.

Mathe mit dem Känguru
Die schönsten Aufgaben von 1995 bis 2005

Monika Noack, Robert Geretschläger, Hansjürg Stocker (Hrsg.),

202 Seiten, kartoniert, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag 2007,

ISBN 3-446-40713-8, CHF 23.80.



Das "Känguru der Mathematik" ist ein internationaler Mathematikwettbewerb für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 3 bis 13., der jedes Jahr im März durchgeführt wird. Französische Mathematiklehrer haben diesen Wettbewerb in Australien entdeckt. Dort gibt es ihn seit 1978. Daraus ist in Frankreich 1994 das „Kangourou des mathématiques" entstanden. Deutschland macht seit 1995 mit, Österreich seit 1999. In der Schweiz hat die DMK, die Deutschschweizerische Mathematikkommission den Wettbewerb 2003 in den Gymnasien eingeführt., wo er in vielen Schulen zu einem festen Bestandteil geworden ist.

Was will dieser Wettbewerb? - Er soll vor allem die Freude an der Mathematik wecken, er soll zum Knobeln, Grübeln, Schätzen anregen. Jede und jeder soll dabei gewinnen. Es gibt keine Verlierer. Es handelt sich um einen Multiple-Choice-Wettbewerb der 75 Minuten dauert. Die Aufgaben sind für die einzelnen Altersgruppen verschieden.

Das vorliegende Buch fasst die 538 spannendsten Aufgaben seit 1995 zusammen. Die Aufgaben sind thematisch geordnet und nicht nach Altersgruppen. Zum Lösen braucht man höchstens Papier und Bleistift, vielleicht auch Zirkel und Lineal, aber keine Taschenrechner und Computer. Es gibt Aufgaben zum Rechnen und Schätzen, man muss Gleichungen und Ungleichungen lösen, Graphen von Funktionen erkennen. Natürlich ist Zählen, Kombinatorik, schwierig; aber mit guten Aufgaben wird auch dies zu einem Spiel!

Einer der wichtigsten Teile ist für mich das Kapitel "Geometrie". Hier wird nicht nur das räumliche Vorstellungsvermögen geübt, sondern auch das Erkennen von Zusammenhängen und logisches Schliessen.

Am Ende jeder Aufgabe steht, wann, wo, für wen sie gestellt wurde. Hier wäre meines Erachtens nur die Alterstufe wichtig, was auch zur Übersichtlichkeit beigetragen hätte. Dies ist aber mein einziger Negativpunkt.

Die Aufgaben sind so spannend gestellt, dass hoffentlich nicht nur die Kinder und Jugendlichen, sondern auch viele Eltern, Lehrerinnen und Lehrer zum Lösen verführt werden.

Ich wünsche mir, dass das "Känguru der Mathematik" auch in der Schweiz bald in den Primar- und Sekundarschulen eingeführt wird. Je früher die Kinder solch spannende Knobelaufgaben lösen dürfen, je besser für das spätere Leben.

Johanna Schönenberger-Deuel, Männedorf

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

inf | Informatik Computer Science

Departement Informatik

Förderung des Informatikunterrichts an Gymnasien

Informatik als Grundlagenfach?

Die Schweizerische Maturitätskommission hat Ende 2006 der Einführung des Ergänzungsfachs Informatik zugestimmt. Damit wird die Informatik voraussichtlich zu einem gymnasialen Fach. Da die Informations- und Kommunikationstechnik fast alle Lebensbereiche durchdringt und eine Schlüsselrolle in Wirtschaft, Gesellschaft und Wissenschaft spielt, sollte der Informatik an Mittelschulen jedoch der Stellenwert eines Schwerpunkt- bzw. Grundlagenfachs zukommen.

Von Herbert Bruderer, ETH Zürich

Im Unterschied zur Mathematik und zur Physik hat die Informatik in vielen Lehrplänen und Stundentafeln noch keinen festen Platz. Sie kämpft nach wie vor um ihre Anerkennung und muss ihren Anspruch als allgemein bildendes Fach immer noch rechtfertigen. Vgl. dazu den Aufsatz „Informatik und allgemeine Bildung" von Prof. Juraj Hromkovic (abrufbar beim Bildungsportal EducETH: www.educ.ethz.ch/bildungimbrennpunkt/index). Mit dem Maturitätsanerkennungsreglement von 1995 wurde die Informatik als eigenständiges (Pflicht-)Fach an Schweizer Gymnasien (weitgehend) abgeschafft. Laut dem Rahmenlehrplan von 1994 wird der Informatikunterricht in andere Fächer eingebaut.

Ergänzungsfach Informatik als erster Schritt

Die geplante Einführung des Ergänzungsfachs Informatik wird am Schattendasein des Informatikunterrichts an Gymnasien wohl kaum allzu viel ändern. Die Informatik wird damit nämlich nicht zum Pflichtfach. Ob das neue Ergänzungsfach von den einzelnen Schulen angeboten wird und ob es tatsächlich zustande kommt, hängt nicht zuletzt von einer ausreichenden Nachfrage ab. „Harte" Fächer werden erfahrungsgemäss viel seltener gewählt als „weiche". Für das Ergänzungsfach Informatik gibt es mittlerweile einen Rahmenlehrplan, der unter Federführung des Schweizerischen Vereins für Informatik in der Ausbildung erarbeitet wurde.

Verschiedene Einrichtungen bemühen sich derzeit, die Informatikausbildung an Mittelschulen nachhaltig zu verbessern., u. a. die Kommission Bildung von ICTswitzerland (Dachorganisation der Schweizer Informatikgesellschaften), die Kerngruppe Informatik des Projekts HSGYM (Hochschulreife und Studierfähigkeit) von Universität Zürich, ETH Zürich und den Mittelschulen des Kantons Zürich, die Berner Hasler-Stiftung, der Schweizerische Verein für Informatik in der Ausbildung sowie die Professur für Informationstechnologie und Ausbildung des Departements Informatik der ETH Zürich.

Weshalb ist die Informatik kein Grundlagenfach?

Es ist nicht einzusehen, weshalb die *Einführung in Wirtschaft und R*echt ein Pflichtfach sein soll und die *Philosophie* als Grundlagenfach angeboten werden kann, während die Informatik bloss die Stellung eines freiwilligen Ergänzungsfachs haben darf.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

inf | Informatik Computer Science

Departement Informatik

Künftige Elitegymnasien (Beispiel Aargau) könnten etwa eine Vorreiterrolle einnehmen und mit einer Sondergenehmigung Informatik als Schwerpunkt- und Grundlagenfach anbieten. Die Entscheidungsträger haben oft eine falsche Vorstellung von der Informatik. Informatik ist einfach gleich Microsoft oder Internet. Die Beherrschung der Informatikanwendungen ist zwar im Alltag sehr wichtig. Die Gymnasien sollten aber vor allem (nachhaltige) Informatikgrundlagen vermitteln.

Neuer Studiengang für Informatiklehrpersonen

Seit Herbst 2006 bietet die ETH Zürich einen neuen Studiengang für Informatiklehrkräfte an, den Master of Advanced Studies in Secondary and Higher Education in Informatik. Im Vergleich zum bisherigen didaktischen Ausweis (und zum höheren Lehramt) ist der Aufwand deutlich höher, was zusammen mit der Neugestaltung die Qualität der Ausbildung positiv beeinflussen wird. Ist die Informatik nur ein Ergänzungsfach (mit wenigen Stunden), so wirkt sich das natürlich auch auf den Stellenmarkt aus. Es dürfte nicht einfach sein, Studierende für den neuen, wesentlich anspruchsvolleren Studiengang zu gewinnen. Grundlegende Voraussetzung für einen vertieften und hochwertigen Informatikunterricht sind aber gut ausgebildete Informatiklehrkräfte.

Weitere Auskünfte:
bruderer@inf.ethz.ch.

Webseiten zur Informatikausbildung an der ETH Zürich (Auswahl)

• Ausstellung von(technischen) Maturaarbeiten:	www.ethtools.ethz.ch/projetcs/AMA
• Bildungsportal der ETH Zürich:	www.educeth.ch
• Einsatz von Informatikmitteln:	www.evim.ethz.ch
• ETH unterwegs (Wanderausstellung für Kantonsschulen):	www.ethtools.ethz.ch/projetcs/enr
• Frauenförderung. Schnupperstudium Informatik:	www.frauen.inf.ethz.ch
• Informatikstudium:	www.maturanden.inf.ethz.ch
• Informationstage für Maturandinnen und Maturanden:	www.maturandeninfo.ethz.ch/news/infotage
• Open Class:	www.openclass.inf.ethz.ch
• Professur für Informationstechnologie und Ausbildung:	www.ite.ethz.ch
• Schweizer Informatikolympiade:	www.soi.ch
• Studienwochen für Mittelschülerinnen und Mittelschüler:	www.ethtools.ethz.ch/projetcs/stdw

mng rämibühl
mathematisch-naturwissenschaftliches gymnasium

k+s rämibühl
kunst und sport gymnasium

Neue Themen im Mathematikunterricht – live am MNG

"The shape of space"

Eine Alternative zur Schulung des Raumvorstellungsvermögens

Jeffrey Weeks ist Autor der beiden Bücher „The shape of space" und „Exploring the shape of space". In diesen Büchern versucht er dem Leser die Problematik der Form des Universums klar zu machen. Auf spielerische und anschauliche Art macht er den Leser vertraut mit Themen aus der Topologie und kreiert damit eine neue Intuition für räumliche Probleme.
Am MNG wird Jeffrey Weeks uns eine Unterrichtslektion mit Schülern und Schülerinnen vorführen, wobei wir 'live' als Zuschauer beobachten können, wie er „the shape of space" veranschaulicht.
Dieser Lektion geht eine kurze Einleitung ins Thema „Schulung des Raumvorstellungsvermögens an der Mittelschule" voraus. Nach der Lektion wird dann grosszügig Zeit eingeplant für eine Diskussion mit Jeffrey Weeks.

Wann:	14:00 Uhr, 29.März, 2007
Wo:	Kantonsschule Rämibühl MNG, Zürich Anreise- und Lageplan liegt bei
Kosten:	Keine
Anmeldung:	Bitte bis 14.März per Email bei Meike Akveld: akveldm@mng.ch
Organisation:	Fachschaft Mathematik MNG Rämibühl Rämistrasse 58 8001 Zürich Tel.: 044 265 64 64

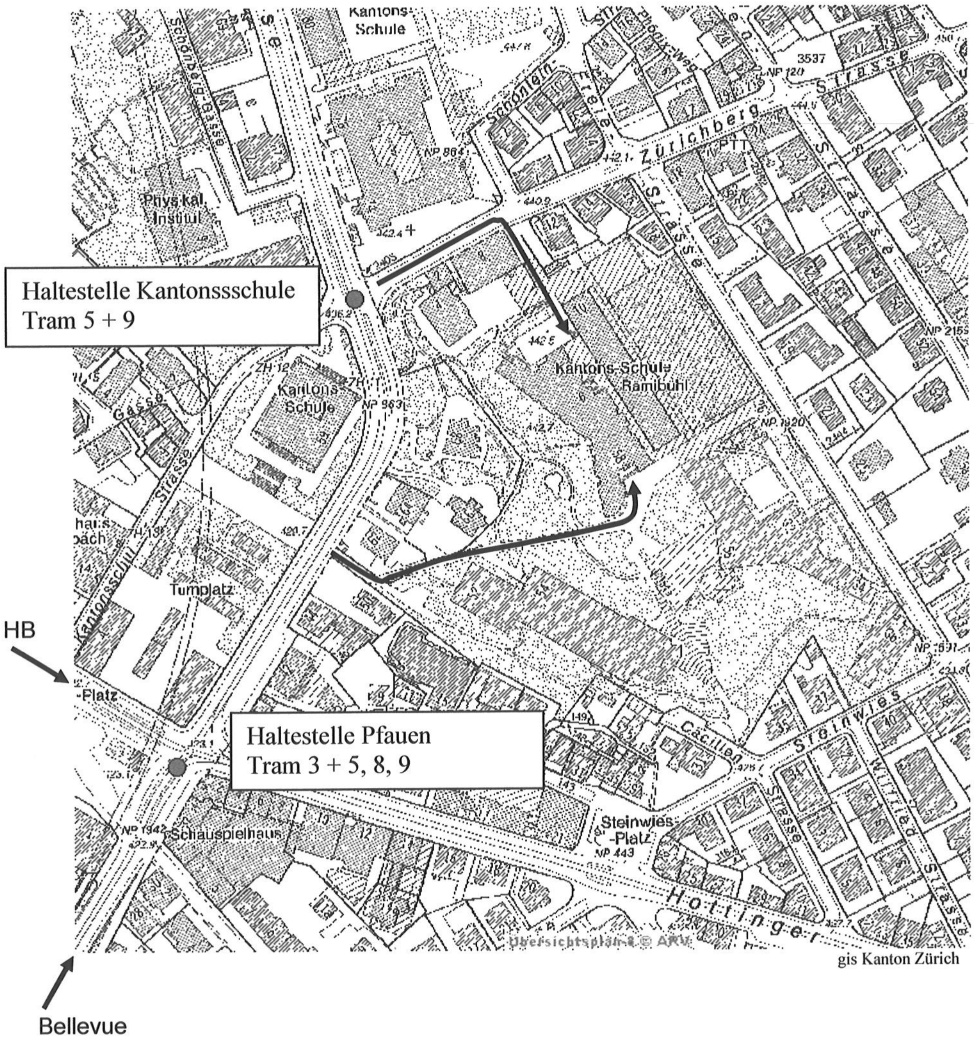
Kantonsschule Rämibühl MNG, Zürich

Anreise- und Lageplan

Anreise mit Bahn / Tram

Hauptbahnhof Zürich
Tram 3 Richtung Klusplatz (neue Haltestelle auf dem Bahnhofplatz)
→ Haltestelle Pfauen
- → Zu Fuss oder
- → Tram 5 Richtung Zoo (nächste) Haltestelle Kantonsschule oder
- → Tram 9 Richtung Schwamendingen (nächste) Haltestelle Kantonsschule

Lageplan



gis Kanton Zürich

Kurs 40

Programmierunterricht und Grundkurs Informatik an den Mittelschulen

Datum	24. März 2007
Kursleitung und Referenten	Prof. Dr. H. Hinterberger, Prof. Dr. J. Hromkovic
Zielgruppe	Lehrpersonen an den Mittelschulen mit Interesse am praxisbezogenen Informatikunterricht. Vertrautheit im Umgang mit dem Computer wird vorausgesetzt.
Kurzbeschreibung	Dieser Grundkurs bietet eine fachdidaktische Weiterbildung für Informatiklehrpersonen und eine Ausbildung für Lehrerinnen und Lehrer, die Interesse haben, Einführungskurse in Informatik mit dem Fokus aufs Programmieren zu erteilen. Im ersten Teil des Kurses werden den Kursteilnehmenden nicht nur eine Webseite und eine komplette Darstellung des Unterrichts zur Verfügung gestellt, sondern auch das didaktische und konzeptuelle Wissen vermittelt, welches den Dozierenden ermöglicht, Methoden und Inhalte der Informatikausbildung korrekt und fächerübergreifend anzubieten. Im zweiten Teil arbeiten die Kursteilnehmenden mit E-Learning Materialien, die im Rahmen der Einführung ins Programmieren für Nichtinformatiker und Nichtinformatikerinnen im ersten Studienjahr an der ETH Zürich eingesetzt werden. Die Kursteilnehmenden bearbeiten selber aktiv ein solches E-Learning Modul. Anschliessend werden die wichtigsten Faktoren besprochen, die es beim Erstellen solcher Module zu berücksichtigen gilt.
Kursunterlagen	Kursordner und E-Learning Module auf USB-Stick: - Einführung in die Java Programmierung mit E.Tutorials (www.et.ethz.ch)
Kursziel	Was ist die Informatik und welche Werte für die Bildung vermittelt sie? Wie soll sie in den Mittelschulen unterrichtet werden, um Kompetenzen auf attraktive Weise aufzubauen, welche andere Fächer nicht zu leisten in der Lage sind? Die Zielsetzung des Kurses ist nicht nur diese Fragen zu beantworten, sondern die fachdidaktischen Kompetenzen der Lehrpersonen für einen Einführungskurs in die Informatik zu vertiefen. Die Kursteilnehmenden sollen die Fähigkeit gewinnen, einen Einführungskurs Informatik mit dem Fokus aufs Programmieren mit den in diesem Kurs vermittelten Unterlagen selbst zu gestalten. Durch aktives Durcharbeiten eines E-Learning Moduls sollen die Kursteilnehmenden Einsicht erhalten, auf welche Art und Weise der Computer eingesetzt werden kann, um einen individualisierten Unterricht anzubieten.
Stichworte	Informatikunterricht, Programmieren, E-Learning, E.Tutorials
Kurskosten	CHF 100.- für Lehrerinnen und Lehrer, sonst CHF 500.-

Bitte zögern Sie nicht, bei Fragen unser Kurssekretariat zu kontaktieren: Tel. 044 632 72 06 oder bernard@inf.ethz.ch

Organisatorisches in Kürze

Kursort	ETH Zürich, Rechenzentrum RZ, Auditorium F 21, Clausiusstrasse 59, Tram Nr. 6, 7, 10, 15 bis «Haldenegg» oder 10 Minuten zu Fuss vom Hauptbahnhof.
Kursgebühr	Fr. 100.– für Lehrerinnen und Lehrer, sonst Fr. 500.--. Die Kursgebühren verstehen sich pro Teilnehmer inklusive Unterlagen und Pausenkaffee, ohne Mittagessen. Bezahlen Sie bitte erst nach Erhalt der Rechnung bei Bestätigung Ihrer Anmeldung.
Kursunterlagen	Werden zu Kursbeginn abgegeben.
Stornierungen	Bis eine Woche vor Kursbeginn ist die Abmeldung gebührenfrei. Bei verspäteter Abmeldung müssen 20% der Kursgebühr, bei Fernbleiben ohne Abmeldung muss die ganze Teilnahmegebühr bezahlt werden.
Anmeldung	Anmeldemöglichkeit finden Sie unter www.inf.ethz.ch/kurs40 Die Teilnehmerzahl ist begrenzt. Wir empfehlen eine frühzeitige Anmeldung.
Anmeldeschluss	17. März 2007
Unterkunft und Verpflegung	In der näheren Umgebung finden Sie eine grosse Auswahl an Vepflegungsmöglichkeiten. Für Zimmerreservationen wenden Sie sich bitte an Zürich Tourismus, Tel. 044 215 40 40, www.zurichtourism.ch oder erkundigen Sie sich beim Kurssekretariat nach Hotels in ETH Nähe.
Auskunft	ETH Zürich, Departement Informatik, Kurssekretariat RZ F7, Clausiusstrasse 59, CH-8092 Zürich Telefon 044 632 72 06, Fax 044 632 16 20 E-Mail bernard@inf.ethz.ch

Detailangaben zum Kurs sowie Anmeldemöglichkeit finden Sie unter www.inf.ethz.ch/kurs40